Devoir à la maison

Exercice 1. *Sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^4$

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F.
2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. On pose $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$ et $u_3 = (-1, 0, -1, 0)$.
   La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?
4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3.
   Quelle est la dimension de G ?
5. Donner une base de $F \cap G$.
6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ?

Exercice 2. *Application linéaire sur un espace de polynômes*

Dans cet exercice, on considère l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ et l'application $\Phi : E \to E$ définie par :

$$\Phi : P(X) \longmapsto P(X) + X(P'(X) + P''(X)).$$

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer la dimension et une base de $\operatorname{Ker} \Phi - 3\,\mathrm{id}_E$.
3. Déterminer la dimension et une base de $\operatorname{Ker} \Phi - 4\,\mathrm{id}_E$.
4. On note $f_1 = 1$, $f_2 = X$, $f_3 = X^2 + 2X$, $f_4 = X^3 + 6X^2 + 6X$.
   Calculer $\Phi^n(f_1)$, $\Phi^n(f_2)$, $\Phi^n(f_3)$, $\Phi^n(f_4)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Exprimer X^3 dans la base f et en déduire $\Phi^n(X^3)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. *Endomorphisme d'un espace de fonctions sinus/cosinus*

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme $\lambda \cos + \mu \sin$ avec λ et μ réels.

1. Justifier que E est un espace vectoriel de dimension finie dont le couple $(\cos, \sin)$ est une base.
2. Montrer que la dérivation des fonctions de la variable réelle définit une application D de E dans E, qui est un endomorphisme.
3. Montrer que D est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout vecteur v de E, il existe un unique vecteur u de E tel que $Du = v$.
4. Montrer qu'on peut alors construire un isomorphisme D^{-1} de E tel que, pour tout vecteur u de E on a $D\left(D^{-1}(u)\right) = u$ et $D^{-1}\left(D(u)\right) = u$.