Devoir à la maison

Exercice 1. *Sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^4$

1. On a :

$$(x,y,z,t) \in F \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ y-z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -y \\ y &=& y \\ z &=& y \\ t &=& t \end{array} \right.$$

Une base de F est donc donnée par les deux vecteurs $v_1 = (1,-1,-1,0)$ et $v_2 = (0,0,0,1)$.

2. D'après le théorème de la base incomplète, on sait que l'on peut compléter la famille (v_1, v_2) par deux vecteurs de la base canonique pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. On vérifie facilement que (v_1, v_2, e_1, e_2) est une famille libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$.

3. L'équation $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$ donne le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b-c &=& 0 \\ a+2b &=& 0 \\ a+3b-c &=& 0 \\ a+4b &=& 0 \end{array} \right.$$

ce qui donne facilement $b = 0$ (comparer la deuxième et la quatrième équation), puis $a = 0$ et $c = 0$. La famille est libre.

4. La famille (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de G. C'est aussi une famille libre d'après la question précédente. C'est donc une base de G qui est de dimension 3.

5. Soit $au_1 + bu_2 + cu_3$ un vecteur de G. On cherche les conditions sur a, b, c pour qu'il soit élément de F. Il vient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a+3b-c &=& 0 \\ 2a+4b-2c &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2a &=& -3b+c \\ b &=& c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& -c \\ b &=& c \\ c &=& c \end{array} \right.$$

Ainsi, les vecteurs de F et G sont ceux qui s'écrivent $c(-u_1 + u_2 + u_3) = c(-1,1,1,3)$. Une base de $F \cap G$ est donc donné par le seul vecteur $(-1,1,1,3)$.

6. D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Ainsi, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, et donc $F+G = \mathbb{R}^4$.

7. Non, car $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Exercice 2.

Dans cet exercice, on considère l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $e = (1, X, X^2, X^3)$ et l'application $\Phi : E \to E$ définie par :

$$\Phi : P(X) \longmapsto P(X) + X(P'(X) + P''(X)).$$

1. Montrons que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$:
   — Comme $P' + P''$ est un polynôme de degré au maximum celui de P moins 1, $P + X(P'+P'')$ est de degré inférieur ou égal à celui de P et Φ est bien définie de E dans E
   — Calculons pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in E^2$:

$$\Phi(\lambda P(X)+\mu Q(X)) = \lambda P(X)+\mu Q(X)+X\left((\lambda P(X) + \mu Q(X))' + (\lambda P(X) + \mu Q(X)''\right)$$

$$\Phi(\lambda P(X)+\mu Q(X)) = \lambda(P(X)+X(P'(X)+P''(X)))+\mu(Q(X)+X(Q'(X)+Q''(X)))$$

$$\Phi(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda\Phi(P(X)) + \mu\Phi(Q(X)).$$

   Donc Φ est linéaire.
2. Calculons la matrice $M = \text{Mat}_{e}(\Phi)$.

$$\Phi(1) = 1 \;\; ; \;\; \Phi(X) = 2X \;\; ; \;\; \Phi(X^2) = 3X^2 + 2X \;\; ; \;\; \Phi(X^3) = 4X^3 + 6X^2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Pour déterminer la dimension et une base de $\text{Ker}\,(\Phi - 3\,\text{id}_E)$, écrivons la matrice de cette application dans e :

$$M - 3I_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Le polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ est donc dans $\text{Ker}\,(\Phi - 3\,\text{id}_E)$ s.si :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   On est donc ramené au système : $\begin{cases} -2a & = 0 \\ -b + 2c & = 0 \\ 6d & = 0 \\ d & = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $a = d = 0$ et $b = 2c$, donc $P = 2cX + cX^2$. Ainsi, $\text{Ker}\,(\Phi - 3\,\text{id}_E) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(2X + X^2)$ est un sous-espace de dimension 1 de base $(2X + X^2)$.
4. Pour déterminer la dimension et une base de $\text{Ker}\,(\Phi - 4\,\text{id}_E)$, écrivons la matrice de cette application dans e :

$$M - 4I_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ est donc dans $\text{Ker}\ (\Phi - 4\ \text{id}_E)$ s.si :

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On est donc ramené au système : $\left\{ \begin{array}{rcl} -3a & = & 0 \\ -2b + 2c & = & 0 \\ -c + 6d & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$

Il équivaut à $a = 0$ et $b = c = 6d$, donc $P = 6dX + 6dX^2 + dX^3$.

Ainsi, $\text{Ker}\ (\Phi - 4\ \text{id}_E) = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\,(6X + 6X^2 + X^3)$ est un sous-espace de dimension 1 de base $(6X + 6X^2 + X^3)$.

5. On note $f_1 = 1$, $f_2 = X$, $f_3 = X^2 + 2X$, $f_4 = X^3 + 6X^2 + 6X$.
   Calculons $\Phi(f_1) = 1$, $\Phi(f_2) = 2X$, $\Phi(f_3) = 3X^2 + 6X$, et $\Phi(f_4) = 4X^3 + 24X^2 + 24X$.
6. Exprimons dans la base f :$\Phi(f_1) = f_1$, $\Phi(f_2) = 2f_2$, $\Phi(f_3) = 3f_3$, $\Phi(f_4) = 4f_4$. On en déduit la matrice N de Φ dans la base f :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

7. On montre trivialement par récurrence : $\Phi^n(f_1) = f_1$, $\Phi^n(f_2) = 2^n f_2$, $\Phi^n(f_3) = 3^n f_3$, $\Phi^n(f_4) = 4^n f_4$.
8. $X^3 = 6f_2 - 6f_3 + f_4$ donc

$$\Phi^n(X^3) = 6\Phi^n(f_2) - 6\Phi^n(f_3) + \Phi^n(f_4)$$

$$\Phi^n(X^3) = 6\ 2^n f_2 - 6\ 3^n f_3 + 4^n f_4$$

Exercice 3. *Endomorphisme d'un espace de fonctions sinus/cosinus*

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme $\lambda \cos + \mu \sin$ avec λ et μ réels.

1. Justifier que E est un espace vectoriel de dimension finie dont le couple $(\cos, \sin)$ est une base.
2. Montrer que la dérivation des fonctions de la variable réelle définit une application D de E dans E, qui est un endomorphisme.
3. Montrer que D est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout vecteur v de E, il existe un unique vecteur u de E tel que $Du = v$.
4. Montrer qu'on peut alors construire un isomorphisme D^{-1} de E tel que, pour tout vecteur u de E on a $D\left(D^{-1}(u)\right) = u$ et $D^{-1}\left(D(u)\right) = u$.

Exercice 4. *Endomorphisme d'un espace de fonctions sinus/cosinus*

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme $\lambda \cos + \mu \sin$ avec λ et μ réels.

1. Par définition, E est le s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les deux fonctions cos et sin. Il s'agit donc de prouver que $(\cos, \sin)$ est une famille libre.

   Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda \cos + \mu \sin = 0$. Ceci signifie :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda \cos x + \mu \cos x = 0.$$

   Ainsi, on en déduit pour $x = 0$ que $\lambda = 0$ puis pour $x = \frac{\pi}{2}$ que $\mu = 0$.

   La famille $(\cos, \sin)$ est libre et génératrice, c'est une base.

2. Montrer que la dérivation des fonctions de la variable réelle définit une application D de E dans E, qui est un endomorphisme.

   D est tel que pour tous λ, μ réels, on a $D(\lambda \cos + \mu \sin) = -\lambda \sin + \mu \cos$. Ainsi, $D(E) \subset E$ donc l'opérateur de dérivation définit bien un endomorphisme de E.

3. Montrer que D est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout vecteur v de E, il existe un unique vecteur u de E tel que $Du = v$.

   On vérifie d'abord l'injectivité : soit $u \in \text{Ker } D$, on a donc λ, $\mu \in \mathbb{R}$ t.q. $u = \lambda \cos + \mu \sin$ et $D(u) = 0$.

   On en déduit :

   $$-\lambda \sin + \mu \cos = 0$$

   d'où $\lambda = \mu = 0$ et donc $u = 0$. D est injective sur E puisque $\text{Ker } D = \{0_E\}$.

   On vérifie alors la surjectivité : si $u \in E$, on a donc λ, $\mu \in \mathbb{R}$ t.q. $u = \lambda \cos + \mu \sin$ et l'on remarque que $u = D(\lambda \sin - \mu \cos)$ admet un antécédent par D.

4. Montrer qu'on peut alors construire un isomorphisme D^{-1} de E tel que, pour tout vecteur u de E on a $D\left(D^{-1}(u)\right) = u$ et $D^{-1}\left(D(u)\right) = u$.

   Le cours garantit que D^{-1}, la bijection réciproque de D, est aussi un isomorphisme. Si $u = \lambda \cos + \mu \sin$ où λ, $\mu \in \mathbb{R}$, on vient de voir que :

   $$D^{-1}(u) = \lambda \sin - \mu \cos.$$