Programme des colles du 05/05 au 09/05

1. Espaces vectoriels.
   - Rang d'une famille de vecteurs.
   - Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.
   - Existence de supplémentaires, caractérisation par l'intersection et les dimensions.
   - Formule de Grassmann.
2. Applications linéaires.
   - Définition de la linéarité, exemples.
   - Combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires.
   - Isomorphismes, réciproque d'un isomorphisme.
   - Image directe d'un s.e.v., image réciproque d'un s.e.v..
   - Image d'une application linéaire et surjectivité, noyau d'une application linéaire et injectivité.
   - Applications linéaires de rang fini.
   - Invariance du rang par composition à droite ou à gauche. par un isomorphisme.
   - Endomorphismes
   - Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. Connaître parfaitement la définition, savoir l'illustrer par un schéma.

     Caractérisations : $p \circ p = p, s \circ s = Id_E$
   - Groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E, définition de u^k si $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
   - Existence et unicité de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ connaissant les images des vecteurs d'une base de E
   - Etant donnée une base de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, équivalence entre la liberté de la famille image de cette base et l'injectivité de l'application linéaire, et entre la générativité de la famille et la surjectivité de l'application.
   - Espaces de dimension finie et isomorphismes.
   - **Théorème du rang :**
     - **Version géométrique : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et que S est un supplémentaire de Ker u, alors $u_{|S}^{|\mathbf{Im}\ u}$ est un isomorphisme.**
     - **Si E est de dimension finie et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors u est de rang fini et :**

$$\mathrm{rg}\ (u) + \dim\ (\mathrm{Ker}\ u) = \dim\ (E).$$

3. Matrices d'applications linéaires.
   - Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
   - **Isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.**
   - Application au calcul de la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
   - Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire avec la matrice de l'application.
   - Matrice d'une composée.
   - Lien entre isomorphismes et matrices inversibles
   - Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Image, rang et noyau d'une matrice.
   - Théorème du rang pour une matrice.
   - Invariance du rang par les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes, ainsi que par transposition.
   - Matrice de passage d'une base à une autre.
   - **Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.**
   - Matrices semblables.

— Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.
— Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.
— Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.