Matrices et applications linéaires

Exercice 1. *Matrice d'une application linéaire*
Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x,y,z) = (-x+y, x-y, -x+z, -y+z).$$

1. Montrer que u est linéaire
2. Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(\mathcal{E}_1)$, $u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.
3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
4. Montrer que $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$.

Exercice 2. *Noyau et Image d'une matrice*
On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de Ker u et Im u.

Exercice 3. *Noyau et Image à l'aide de la matrice*
Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1 = (1, -2, 0)$, $w_2 = (-1, 2, 0)$, $w_3 = (0, 0, 2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1) = w_1\ , u(\mathcal{E}_2) = w_2\ , u(\mathcal{E}_3) = w_3.$$

1. (a) Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$.
   En déduire la matrice de u dans la base canonique.
   (b) Soit $W = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $u(W)$.
2. (a) Trouver une base de Ker (u) et une base de Im(u).
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } (u) \oplus \text{Im}(u)$.
3. Déterminer Ker $(u - Id)$ et Im$(u - Id)$ où Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $u - Id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. *Inverse et Puissances d'un endomorphisme à l'aide de sa matrice*
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = (y-z, -3x+4y-3z, y-x).$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Vérifier que $A^2 - 3A + 2I = 0$; en déduire que A est inversible, et donner son inverse.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $B_n = A^n + A - 2I$.
   (a) Montrer que $B_{n+1} = 2B_n$.
   (b) En déduire une expression de A^n.

Exercice 5. *Image et Noyau supplémentaires*
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver une base de Im f, une base de Ker f. A t-on Ker $f \oplus \Im f = \mathbb{R}^3$?

Exercice 6. *Rang de matrice et équation de l'image*
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de u, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de Im u.

Exercice 7. *Application linéaire définie sur les matrices*

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8. *Matrice d'un endomorphisme de l'espace des polynômes*
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \qquad u(P) = P' + P.$$

Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$. L'endomorphisme u est-il inversible ?
Si oui, donner la matrice de u^{-1} dans la base canonique.

Exercice 9. *Inverse de la matrice d'un endomorphisme de l'espace des polynômes*
Soit :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

Montrer que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Ecrire la matrice A de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer A^{-1}.

Exercice 10. *Base adaptée à un endomorphisme dont le carré est nul*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\dim(\ker(f)) = 2$.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. *Rang de matrices*

Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **2**. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **4**. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 12. *Surjective ?*

Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ est surjective.

Exercice 13. *Avec un paramètre*

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. *Endomorphisme de* $\mathbb{C}_n[X]$

Soient a, b dans $\mathbb{C}$ distincts et

$$\begin{array}{rcl} \Phi \ : \ \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & (X-a)(X-b)P'(X) - n\left(X - \dfrac{a+b}{2}\right)P(X) \end{array}$$

Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$. Ecrire la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 15. *Changement de base*

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e_1' = e_2 + e_3, \ e_2' = e_3 + e_1, \ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f_1', f_2') est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 16. *Matrice d'une projection*

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.

Exercice 17. *Matrice de projecteur*

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que AB est une matrice de projecteur.
2. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice 18. *Exemples de matrices semblables*

Montrer que les matrices A, B, C et D suivantes sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. *Deux matrices semblables*

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de démontrer que M et D sont semblables. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.

1. Démontrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{Vect}(u_1) = \ker(f - Id)$. De même, prouver l'existence de $u_2, u_{-4} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\text{Vect}(u_2) = \ker(f - 2Id)$ et $\text{Vect}(u_{-4}) = \ker(f + 4Id)$.
2. Démontrer que (u_1, u_2, u_{-4}) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Conclure.

Exercice 20. *Matrice nilpotente d'indice maximal*

Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K).$$

1. Calculer J^p pour $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $J^{n-1} \neq 0$ et $J^n = 0$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$. (On dit que M est nilpotente d'ordre n)
   (a) Justifier l'existence d'un vecteur $X_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $M^{n-1}X_0 \neq 0$.
   (b) Montrer que $(X_0, MX_0, M^2X_0, \cdots, M^{n-1}X_0)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
   (c) Montrer que M est semblable à J.