Devoir surveillé

1 Cours

1. Formule de Grassmann : préciser les hypothèses et la formule.
2. Qu'est-ce qu'une application linéaire ?
3. Image d'une application linéaire, noyau d'une application linéaire : préciser ces deux définitions.
4. Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires : donner la définition, l'illustrer par un schéma.
   (DS bis : Caractérisation $p \circ p = p$ à préciser et démontrer)
5. Théorème du rang pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$:
   — Indiquer la version géométrique
   — Préciser ce théorème lorsque E est de dimension finie
6. Pourquoi peut-on affirmer que $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes ?
7. Qu'est-ce que l'application linéaire canoniquement associée à une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$?
8. Matrice de passage d'une base à une autre : donner la définition
9. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.

2 DS normal

Exercice 1. *Bases*

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$ et $F\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E.
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F.
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?
6. Soit $u = (x, y, z)$, donner la matrice de coordonnées de u dans la base (a, b, c).

Exercice 2. *Une application linéaire sur un espace de matrices*

Dans cet exercice, le corps de base est noté K, pouvant désigner indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $E = \mathcal{M}_2(K)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ deux éléments de E. On munit E de sa base canonique :

$$\mathcal{B} = \left(E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Soit enfin f l'endomorphisme de E défini par :

$$f : E \longrightarrow E$$

$$f : M \longmapsto AM - MB$$

1. Calculer la matrice $F \in \mathcal{M}_4(K)$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.
2. Montrer que f est l'application linéaire nulle si et seulement si :

$$\exists \lambda \in K, \quad A = B = \lambda I_2$$

Exercice 3. *Etude d'un endomorphisme nilpotent à l'aide de changements de bases*

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ et l'on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$.
   (b) Calculer $(I_3 - M)(I_3 + M + M^2)$, en déduire que $I_3 - M$ est inversible et préciser son inverse.
2. (a) Quelle est la dimension du noyau de u ? Quel est le rang de u ?
   (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} u^2$, alors la famille $(x, u(x), u^2(x))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire concernant la famille $(x, -u(x), u^2(x))$ quand $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} u^2$?
3. On pose $e'_1 = u^2(e_3)$, $e'_2 = -u(e_3)$ et $e'3 = e_3$.
   (a) Montrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice de passage P de la base e à la base e'.
   (b) Calculer P^2 et en déduire P^{-1}.
   (c) Préciser la matrice M' de u dans la base e'.
   (d) On désigne par σ l'endomorphisme dont la matrice dans la base e est P. Indiquer à quel type particulier d'endomorphismes appartient σ ainsi que les sous-espaces qui lui sont associés.
   (e) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans la quelle la matrice de σ est :

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 DSbis : Endomorphismes nilpotents

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie non nulle. On note $O_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E et Id_E l'endomorphisme identité de E.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et f un endomorphisme de E, on définit par récurrence l'endomorphisme f^n par :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Un endomorphisme f de E est dit nilpotent si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = O_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Deux exemples.

   (a) Dans cette question, $E = \mathbb{K}^n$ et l'on note $\phi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ l'application définie par :

   $$\phi : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (0, x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

      i. Justifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
      ii. Déterminer la dimension de l'image et du noyau de l'endomorphisme ϕ.
      iii. Montrer que ϕ est nilpotent.

   (b) Dans cette question, $E = \mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $\Delta : \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_n[X]$ l'application définie par :

   $$\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X).$$

      i. Justifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
      ii. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en distinguant les cas selon que P est ou non un polynôme constant.
      iii. Déterminer le noyau, le rang puis l'image de Δ.
      iv. Montrer que Δ est un endomorphisme nilpotent.

2. Etude générale

   (a) Soient f et g des endomorphismes de E.

      i. Justifier que si f est nilpotent et que f et g commutent, alors $f \circ g$ est nilpotent.
      ii. Justifier que si $f \circ g$ est nilpotent, il en est de même de $g \circ f$.
      iii. On suppose que f est nilpotent, donc que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour un certain entier n non nul. Montrer que $Id - f$ est inversible d'inverse :

      $$Id + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}.$$

   (b) Soit f un endomorphisme nilpotent de E.
   Justifier l'existence d'un plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   Cet entier est appelé l'indice de nilpotence de f, on le notera $\nu(f)$.

   (c) Soit f un endomorphisme nilpotent de E.
   L'objectif de cette question est de prouver que $\nu(f) \leq \mathrm{Dim}\ E$.
   A cette fin, on note pour tout $p \in \mathbb{N}$: $N_p = \mathrm{Ker}\ f^p$.

      i. Déterminer $N_{\nu(f)}$.
      ii. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.

iii. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que Dim $N_p =$ Dim N_{p+1}, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+q}$.

iv. Conclure.

3. Commutant d'un endomorphisme nilpotent maximal.
   Soit f un endomorphisme nilpotent de E tel que $\nu(f) =$ Dim E.
   On note n cet entier égal à la dimension de E et à l'indice de nilpotence de f, et $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E commutant avec f.

   (a) Montrer que $C(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.

   (b) Soit $g \in C(f)$.

      i. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.

      ii. Montrer que la famille de vecteurs $B = (x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

      iii. On note $a0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ les coordonnées de $g(x_0)$ dans la base B.
      Exprimer, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $g\left(f^k(x_0)\right)$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B.

      iv. En déduire que $g = a_0 Id + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

   (c) Conclure que $C(f) =$ Vect $(Id, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$.

   (d) Déterminer la dimension de $C(f)$.