# Arithmétique et dénombrement

## 1 Arithmétique

**Exercice 1.** *Congruences et critères de divisibilité en base 10*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $a$ et $b$ sont dans $\mathbb{Z}$, la relation $a \equiv b[n]$ qui signifie $\exists k \in \mathbb{Z},\ a - b = kn$ est équivalente à $n|(a-b)$.
   (a) Si $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ vérifient $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$, montrer que l'on a alors : $a + c \equiv b + d[n]$ et $ac \equiv bd[n]$.
   (b) Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ vérifient $a \equiv b[n]$, montrer que l'on a pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ : $a^r \equiv b^r[n]$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}$ dont l'écriture décimale est $m_l m_{l-1} \cdots m_1 m_0$ avec $m_i \in [\![0, 9]\!]$.
   (a) Justifier les règles habituelles pour déterminer si $m$ est divisible par 2, par 5 ou par 3.
   (b) Montrer que $m \equiv m_0 - m_1 + m_2 \cdots + (-1)^l m_l[11]$, donner un critère de divisibilité par 11.
   (c) Donner enfin un critère de divisibilité par 7.

**Exercice 2.**

Déterminer les nombres qui s'écrivent en base 10 sous la forme $aabb$ et qui sont des carrés parfaits.

**Exercice 3.** *Nombres premiers*

Soit $p \geq 5$ un nombre premier.

1. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 6k + 1$ ou $p = 6k - 1$.
2. Montrer que $12|(p^2 - 1)$, puis que $24|(p^2 - 1)$.

**Exercice 4.** *Nombres à PGCD et PPCM fixés*

1. Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels tels que $PGCD(a, b) = 15$ et $PPCM(a, b) = 3150$. Déterminer l'ensemble $E = \{a, b\}$.
2. Soient $m$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que $m|n$. A l'aide des décompositions de $m$ et de $n$ en produit de facteurs premiers, déterminer le nombre de couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $PGCD(a, b) = m$ et $PPCM(a, b) = n$.

**Exercice 5.** *Formule $x^n - y^n$*

Soient $a \geq 2$ et $n \geq 1$ des entiers tels que $a^n + 1$ est premier. Montrer que $n$ est une puissance de 2.

**Exercice 6.** *Formule de Legendre*

1. Soit $p$ un nombre premier et $n$ un entier naturel, on note $E_n = \{1, 2, \cdots, n\}$.

(a) Si $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer le nombre d'entiers de l'ensemble $E_n$ qui sont divisibles par $p^k$ à l'aide de la fonction partie entière.

(b) Justifier le fait que $\left\lfloor \dfrac{n}{p^k} \right\rfloor$ vaut 0 pour tout $k$ assez grand.

(c) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note $v_p(i)$ la plus grande puissance de $p$ qui divise $i$, c'est tout simplement la puissance à laquelle apparait $p$ dans la décomposition de $i$. Expliquer la formule de Legendre :

$$v_p(n!) = \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$ [1]

2. Applications :
   (a) Par combien de zéros se termine l'écriture de 2014! ?
   (b) Retrouver à l'aide de la formule de Legendre que les coefficients binomiaux sont des entiers, et si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, montrer :

$$\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!} \in \mathbb{N}.$$

**Exercice 7.** *Petit théorème de Fermat*
Soit $p$ un nombre premier.

1. Si $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, montrer que $\binom{p}{k}$ est divisible par $p$.
2. Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad p \mid n^p - n$ .
3. Si $n$ n'est pas un multiple de $p$, montrer que cette relation est équivalente à : $p \mid n^{p-1} - 1$.

# 2 Dénombrement

**Exercice 8.** *Cardinal de la différence symétrique*
Pour $A, B$ deux ensembles de $E$ on note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Si $E$ est un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card } A\Delta B = \text{Card } A + \text{Card } B - 2\text{Card } A \cap B.$$

**Exercice 9.** *Dénombrement d'un ensemble de parties*
Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments, et $A \subset E$ un sous-ensemble à $p$ éléments. Quel est le nombre de parties de $E$ qui contiennent un et un seul élément de $A$ ?

**Exercice 10.** *Anagrammes*
Deux mots sont des anagrammes s'ils sont formés avec les mêmes lettres apparaissant chacune le même nombre de fois dans chacun d'eux. Par exemple, JEUNE et ENJEU sont des anagrammes. Déterminer combien les mots STYLOGRAPHIQUE, JEUNE et TRANSISTORISASSIONS ont d'anagrammes ( il s'agit d'un exercice de mathématiques, on considère tous les mots que l'on peut former, qu'ils aient un sens ou non ).

**Exercice 11.** *Poker*
On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes. Précisément, notant $E = C \times H$ où $C = \{\spadesuit, \ \heartsuit, \ \diamondsuit, \ \clubsuit\}$ est l'ensemble des couleurs, et $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, V, D,$ l'ensemble des hauteurs, on s'intéresse aux parties $A \in \mathcal{P}(E)$ telles ques Card $(A) = 5$.

1. NB : cette somme est finie dans la mesure où les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
3. Dénombrer maintenant le nombre de mains réalisant les différentes combinaisons du poker :
   (a) La quinte flush : une main de 5 cartes consécutives de la même couleur sachant que le 1 peut participer à deux suites $1, 2, 3, 4, 5$ et $10, V, D, R, 1$.
   (b) Le carré : une main dans laquelle on dispose de 4 cartes de la même hauteur.
   (c) Le full : une main avec 2 cartes d'une même hauteur, et 3 autres cartes d'une même hauteur.
   (d) La couleur : une main de 5 cartes de la même couleur qui n'est pas une quinte flush.
   (e) La suite : une main de 5 cartes consécutives qui n'est pas une quinte flush.
   (f) Le brelan : une main comprenant trois cartes de la même hauteur, sans full ni carré.
   (g) La double paire : c'est une main avec deux paires de cartes de même hauteur sans full.
   (h) La paire : c'est une main avec une seule paire de cartes de la même hauteur.

**Exercice 12.** *Podium !*

Une course oppose 20 concurrents.

1. Combien y-a-t-il de podiums possibles ?
2. On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un livre. Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles.

**Exercice 13.** *Ranger des livres*

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

1. si les livres doivent être groupés par matières.
2. si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Indications :

1. Choisir l'ordre des groupes, puis l'ordre des livres à l'intérieur de chacun des groupes.
2. Choisir la position du groupe des livres de mathématiques, puis ranger les livres de mathématiques d'un côté, le reste des livres de l'autre.

**Exercice 14.** *Nombres et chiffres*

Soit $A$ l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun 1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

1. $A$.
2. $A_1$, ensemble des nombres de $A$ ayant 7 chiffres différents.
3. $A_2$, ensemble des nombres pairs de $A$.
4. $A_3$, ensemble des nombres de $A$ dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Indications : Il faut mettre à part le premier chiffre (différent de 0), puis

1. Décrire les éléments de $A$ en terme de $7 - liste$.
2. Décrire les éléments de $A_1$ en terme d'arrangements.

3. Séparer le traitement du chiffre des unités et le traitement des chiffres précédents.
4. Combien y-a-t-il de façons de choisir 7 chiffres distincts parmi 9 ?

**Exercice 15.** *Des tours sur un échiquier*
De combien de façons différentes peut-on placer $p$ tours sur un échiquier de façon à ce qu'elles ne puissent pas se prendre.
Indication : Commencer par choisir les lignes où sont les tours.

**Exercice 16.** *Le problème des anniversaires*
Vous êtes dans une classe de 30 élèves. Votre prof de maths veut parier avec vous que deux personnes dans cette classe ont la même date d'anniversaire. Acceptez-vous le pari ? Indication : traduire le problème en terme d'application injective (ou plutôt non injective...).

**Exercice 17.** *Grilles de Fleissner*
Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Première Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou après éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour.

1. Combien peut-on fabriquer de telles grilles ?
2. Pour quelles valeurs de $n$ peut-on fabriquer une grille de Fleissner de côté $n$ ? Combien de telles grilles peut-on alors fabriquer ?

Indications :

1. On a 36 choix pour le premier trou. Et combien pour le second ?
2. Il faut effectuer $n^2/4$ trous...

**Exercice 18.** *Parties de cardinal pair*

Soit $E$ un ensemble, $a \in E$ et $f : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \\ X \mapsto X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X \\ X \mapsto X - \{a\} \text{ si } a \in X \end{cases}$

1. Montrer que $f$ est une bijection.
2. On suppose désormais que $E$ est non vide, fini, et Card $(E) = n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathcal{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de $E$ de cardinal pair et $\mathcal{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de $E$ de cardinal impair.
   Montrer que Card $(\mathcal{P}_0(E)) =$ Card $(\mathcal{P}_1(E))$.
3. Calculer ces cardinaux et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

**Exercice 19.** *Interprétation ensembliste d'une formule avec le binôme*
Montrer que, pour $n \geq 1$, on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Indication :On pourra compter le nombre de parties à $n$ éléments dans un ensemble à $2n$ éléments en coupant d'abord le gros ensemble en deux parties égales.