Concours blanc

Exercice 1. *Développements limités*

1. Calculer les développements limités suivants en 0 :

$$\begin{array}{ll} \textbf{a)}\ \cos(x) - e^x \text{ à l'ordre } 3 & \textbf{b)}\ 1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7 \text{ à l'ordre } 3 \\ \textbf{c)}\ \ln(\cos(x)) \text{ à l'ordre } 3 & \textbf{d)}\ (1+x)^x \text{ à l'ordre } 4. \end{array}$$

2. Calculer les développements limités suivants :

$$\textbf{a)}\ \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en 2} \qquad \textbf{b)}\ \frac{1}{1+x^2} \text{ à l'ordre 3 en } -2$$

Exercice 2. *Application au calcul de limites*

En utilisant un développement limité, calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} \textbf{1}.\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} & \textbf{2}.\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x\ln(1+2x)} \\ \textbf{3}.\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^3} & \textbf{4}.\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^3} \\ \textbf{5}.\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)}\right) & \textbf{6}.\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2} \end{array}$$

Exercice 3. *Applications linéaires et matrices*

Dans ce problème, on note $E = \mathbb{R}^2$ et F, G les deux parties suivantes de E :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x + y = 0 \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x + 2y = 0 \right\}$$

On note aussi e la famille suivante de vecteurs de E :

$$e = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ ,\ e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

1. Justifier que e forme un e base de E.
2. Justifier que F et G sont deux sous-espaces de E.
3. Montrer que l'on a :
$$F = \text{Vect } (e_1) \text{ et } G = \text{Vect } (e_2)$$
4. Montrer que F et G sont supplémentaires.

5. On note P la matrice suivante :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que P est inversible en calculant P^{-1}.
6. On note $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ le projecteur sur F dans la direction de G, et $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Préciser les matrice $A = \text{Mat}_e(p)$ et $B = \text{Mat}_e(s)$ de p et s respectivement dans la base e.
7. On note $c = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que la matrice $M = \text{Mat}_c(p)$ du projecteur précédemment défini est :
$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
8. On considère dans cette question une application de l'espace des matrices carrées de taille 2 dans lui-même :
$$\phi \ : \ \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$
$$\phi \ : \ L \mapsto ML - LM$$
   (a) Montrer que ϕ est linéaire.
   (b) On note
$$\mathcal{E} = \left(E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
   la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice N de ϕ dans cette base.
   (c) Donner une base de Ker N.
   (d) On note :
$$\mathcal{C}(p) = \left\{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \mid u \circ p = p \circ u\right\}$$
   l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui commutent avec p.
   Montrer que l'on a :
$$\mathcal{C}(p) = \text{Vect} \ \ (p, id_{\mathbb{R}^2})$$
9. Plus généralement, si E est un espace quelconque et que $p \in \mathcal{L}(E)$ rappeler à l'aide d'un schéma la définition et une caractérisation de : p est un projecteur.
Montrer alors que $u \in \mathcal{L}(E)$ commute avec p si et seulement si Ker p et Im p sont stables par u.