Concours blanc

Exercice 1. *Développements limités*

1. Calculer les développements limités suivants en 0 :

$$\textbf{a)}\ \cos(x) - e^x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\cos(x) - e^x \underset{x\to 0}{=} -x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\textbf{b)}\ 1 + x^2 - 3x^3 + 4x^7 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - 3x^3 + o(x^3)$$

$$\textbf{c)}\ \ln(\cos(x))$$

On commence par écrire :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

On écrit alors le développement limité du ln en 1 :

$$\ln(1+y) \underset{y\to 0}{=} y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Pour $y(x) = \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$, on a donc $y(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $y(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ d'où :

$$\ln(1+y(x)) \underset{x\to 0}{=} y(x) - \frac{y(x)^2}{2} + o(x^4)$$

$$\ln(1+y(x)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\textbf{d)}\ (1+x)^x = e^{x\ln(1+x)}$$

Or $x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3))$.
On pose alors $y(x) = x\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2))$ et l'on a :

$$y^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^4 + o(x^4)$$

On obtient alors par composition :

$$(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)) + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$(1+x)^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$$

2. Calculer les développements limités suivants :

$$\textbf{a)}\ \sqrt{x} \text{ à l'ordre 3 en 2}$$

On pose $x = 2 + h$ et l'on se ramène ainsi au développement limité en 0 de :

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}}$$

Or $\sqrt{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3)$, d'où :

$$\sqrt{2+h} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}h - \frac{1}{32}h^2 + \frac{1}{128}h^3 + o(h^3)\right)$$

$$\sqrt{2+h} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}h - \frac{\sqrt{2}}{32}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}h^3 + o(h^3)$$

$$\textbf{b)}\ \frac{1}{1+x^2} \text{ à l'ordre 3 en } -2$$

On pose $x = -2 + h$ et l'on se ramène au développement limité en 0 de :

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} = \frac{1}{5-4h+h^2} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{4}{5}h+\frac{1}{5}h^2}$$

On rappelle que $\frac{1}{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1 - y + y^2 - y^3 + o(y^3)$, on en déduit avec $y(h) = -\frac{4}{5}h + \frac{1}{5}h^2$:

$$y^2(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{16}{25}h^2 - \frac{8}{25}h^3 + o(h^3)$$

$$y^3(h) \underset{h\to 0}{=} -\frac{64}{125}h^3 + o(h^3)$$

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{5}\left(1 + \frac{4}{5}h - \frac{1}{5}h^2 + \frac{16}{25}h^2 - \frac{8}{25}h^3 + \frac{64}{125}h^3 + o(h^3)\right)$$

$$\frac{1}{1+(-2+h)^2} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{5} + \frac{4}{25}h + \frac{11}{125}h^2 + \frac{24}{625}h^3 + o(h^3)$$

Exercice 2. *Application au calcul de limites*

En utilisant un développement limité, calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
2. $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - 1 + o(x^2)$ donc $\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.
   $\ln(1+y) \underset{y\to 0}{\sim} y$ donc $\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ et $x\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x^2$.
   On a donc $\frac{\cos(x)-1}{x\ln(1+2x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}$.
3. $$sin(x) - x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))$$
   $$\sin(x) - x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
   Ainsi, $\sin(x) - x\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$ et $\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.

4. $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x$ donc $\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

   Ainsi, $\frac{\ln(1+x)-x}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}$. Cette expression admet donc pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs négatives, et $-\infty$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Elle n'a pas de limite en 0.

5. $$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2))$$
   $$\sin^2 x \underset{x\to 0}{=} x^2(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2))$$
   $$\sin^2 x - x^2 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^4}{3}$$

   Or $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ d'où $x^2 \sin^2 x \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ et :
   $$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}.$$

6. $$\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \ln(\cos\frac{1}{x})\right)$$

   Or $\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\cos y \underset{y\to 0}{=} 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ d'où :
   $$\cos\frac{1}{x} \underset{x\to\infty}{=} 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
   $$\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

   Puisque $\ln(1+y) \underset{y\to 0}{\sim} y$, on en déduit :
   $$\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2}$$
   $$x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$
   $$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Exercice 3. *Applications linéaires et matrices*

1. **Justifier que e forme une base de E.**

   Les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathbb{R}^2$.

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $e = (e_1, e_2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que c'est une base.

2. **Justifier que F et G sont deux sous-espaces de E.**

   $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x + y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel car :

   — Il contient le vecteur nul : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— Il est stable par combinaison linéaire : si $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sont dans F, alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$ d'où :

$$(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(x_1 + y_1) + \mu(x_2 + y_2) = 0$$

On en déduit que :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in F$$

Même raisonnement pour $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x + 2y = 0 \right\}$.

3. **Montrer que $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2)$.**

   Tout vecteur de F satisfait $x + y = 0$, c'est à dire $y = -x$ donc $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = xe_1$. Donc $F = \mathrm{Vect}(e_1)$.

   De même, $x + 2y = 0$ entraîne $x = -2y$ donc $\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = ye_2$, donc $G = \mathrm{Vect}(e_2)$.

4. **Montrer que F et G sont supplémentaires.**

   On a $F = \mathrm{Vect}(e_1)$, $G = \mathrm{Vect}(e_2)$ et $e = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donc $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

5. **Montrer que P est inversible en calculant P^{-1}.**

   On souhaite inverser la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   en effectuant des opérations élémentaires sur la matrice et sur l'identité :

$$(P \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

   Étape 1 : Ajouter la ligne 1 à la ligne 2 (L2 $\leftarrow$ L2 + L1) :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

   Étape 2 : Multiplier la ligne 2 par -1 (L2 $\leftarrow$ $-1\cdot$ L2) :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

   Étape 3 : Ajouter 2 fois la ligne 2 à la ligne 1 (L1 $\leftarrow$ L1 + $2\cdot$ L2) :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

   On obtient donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Ce résultat est cohérent avec la vérification $P \cdot P^{-1} = I$.

6. **Déterminer les matrices $A = \mathrm{Mat}_e(p)$ et $B = \mathrm{Mat}_e(s)$.**

   Dans la base $e = (e_1, e_2)$:

   — Le projecteur p sur $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ dans la direction de $G = \mathrm{Vect}(e_2)$ correspond à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

— La symétrie s par rapport à F parallèlement à G s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. **Montrer que la matrice $M = \mathrm{Mat}_c(p)$ est donnée par :**

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Il y avait une erreur dans l'énoncé initial concernant la matrice du projecteur p dans la base canonique c. Nous corrigeons ici cette matrice.

On rappelle que p est la projection sur $F = \mathrm{Vect}(e_1)$ selon $G = \mathrm{Vect}(e_2)$, et que la base $e = (e_1, e_2)$ est donnée par :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage de la base e à la base canonique c est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans la base e, le projecteur p s'écrit simplement :

$$A = \mathrm{Mat}_e(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit la matrice de p dans la base canonique c par la formule :

$$M = \mathrm{Mat}_c(p) = PAP^{-1}$$

Effectuons le calcul :

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = PA \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Conclusion : La matrice correcte du projecteur p dans la base canonique est :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_c(p) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

8. **Application $\phi : L \mapsto ML - LM$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**

   (a) ϕ est une application linéaire car elle est combinaison linéaire de deux applications linéaires : multiplication à gauche et à droite par des matrices fixes. Précisément, si L et H sont deux matrices, λ et μ des scalaires, alors on a :

$$\phi(\lambda L + \mu H) = M(\lambda L + \mu H) - (\lambda L + \mu H)M$$

$$\phi(\lambda L + \mu H) = \lambda ML + \mu MH - \lambda LM - \mu HM$$
$$\phi(\lambda L + \mu H) = \lambda(ML - LM) + \mu(MH - HM)$$
$$\phi(\lambda L + \mu H) = \lambda\phi(L) + \mu\phi(H)$$

   (b) Pour déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique $\mathcal{E}$, on applique ϕ à chaque $E_{i,j}$, et on exprime le résultat dans la base $\mathcal{E}$:

1. Calcul de $\phi(E_{1,1})$

$$ME_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,1}M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$'\phi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -2E_{1,2} - E_{2,1}$$

2. Calcul de $\phi(E_{1,2})$

$$ME_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2}M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$'\phi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_{1,1} - 3E_{1,2} - E_{2,2}$$

3. Calcul de $\phi(E_{2,1})$

$$ME_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$'\phi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} + 3E_{2,1} - 2E_{2,2}$$

4. Calcul de $\phi(E_{2,2})$

$$ME_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$'\phi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,2} + E_{2,1}$$

5. Matrice de ϕ On écrit maintenant chaque image $\phi(E_{i,j})$ comme combinaison linéaire de la base $\mathcal{E}$ et on les place en colonnes pour former la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) On considère la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ tels que $NX = 0$. On applique la méthode du pivot de Gauss sur la matrice N.

Étape 1 : permuter les lignes L_1 et L_2 pour avoir un pivot non nul en (1,1) :

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : rendre le pivot (1,1) égal à 1 en divisant L_1 par -2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 3 : annuler les coefficients en dessous et au-dessus du pivot (1,1) :
- $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ - L_2 inchangée - L_4 inchangée

$$L_3 = (-1) \cdot L_1 + L_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Étape 4 : éliminer en colonne 2 avec L_2 comme pivot :
- $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} \cdot L_2$ - $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résolution du système réduit :
- On pose $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu$ (libres). - L2 : $x_2 + 2x_3 = 0x_2 = -2\lambda$ - L1 : $x_1 + \frac{3}{2}x_2 - x_4 = 0x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + x_4 = 3\lambda + \mu$

Conclusion : les solutions sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

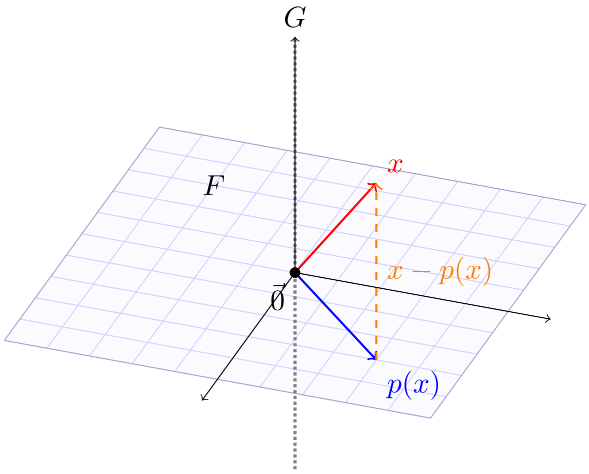
$$\ker(N) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(d) Montrons que $\mathcal{C}(p) = \text{Vect}(p, id_{\mathbb{R}^2})$.

On remarque que $\mathcal{C}(p)$ est constitué des endomorphismes dont la matrice dans la base canonique est un élément de Ker ϕ. Or d'après la question précédente, la dimension de Ker ϕ, qui est la même que celle du noyau de sa matrice Ker N, est 2.

Puisque p et $id_{\mathbb{R}^2}$ sont une famille libre dans $\mathcal{C}(p)$, ils en forment une base.

9. **Cas général : projecteurs**



Soit E un espace vectoriel, et soient F et G deux sous-espaces de E tels que :

$$E = F \oplus G$$

c'est-à-dire que tout vecteur $u \in E$ s'écrit de façon unique comme $u = v + w$, avec $v \in F$ et $w \in G$.

On définit alors l'application linéaire $p : E \to E$ par :

$$p(u) = v \quad \text{où } u = v + w, \; v \in F, \; w \in G$$

Cette application p est appelée le projecteur sur F parallèlement à G.

Un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme tel que $p^2 = p$. On a alors :

$$E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p).$$

$\operatorname{Im}(p)$ est alors le sous-espace sur lequel p projette, tandis que $\operatorname{Ker}(p)$ est celui dans la direction duquel se fait la projection.

Soit donc p un tel projecteur, prouvons d'abord si $u \in \mathcal{C}(p)$, que $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$ sont stables par u :
— Soit $x \in \operatorname{Ker}(p)$, on a $p(x) = 0_E$ d'où $u(p(x)) = 0_E$.Ainsi, $p(u(x)) = 0_E$ donc $u(x) \in \operatorname{Ker}(p)$.
— Soit $x \in \operatorname{Im}(p)$, on a alors $y \in E$ tel que $x = p(y)$ d'où l'on déduit : $u(x) = u(p(y))$ donc $u(x) = p(u(y))$. Ainsi, on a bien $u(x) \in \operatorname{Im}(p)$

Réciproquement, soit u qui stabilise $\operatorname{Ker}(p)$ et $\operatorname{Im}(p)$. On a alors si $x \in E$, un couple $(f, g) \in \operatorname{Ker}(p) \times \operatorname{Im}(p)$ tel que $x = f + g$. On calcule alors :

$$u(p(x)) = u(f)$$

$$p(u(x)) = p(u(f) + u(g)) = p(u(f)) + p(u(g)$$

Or $u(f) \in \operatorname{Im}(p)$ donc $p(u(f)) = u(f)$ et $u(g) \in \operatorname{Ker}(p)$ donc $p(u(g)) = 0_E$. On conclut :

$$p(u(x)) = u(f)$$

Et l'on a bien vérifié que $u(p(x)) = p(u(x))$ donc u est un endomorphisme qui commute avec p.