Devoir surveillé

Exercice 1. *Dominos*

Un jeu de dominos est constitué de pièces rectangulaires : chaque domino est découpé en deux carrés dans chacun lesquels on peut avoir entre 1 et 6 points noirs dessinés.

1. Pourquoi y a-t-il 21 dominos dans le jeu ?
2. On tire deux dominos parmi le jeu (l'ordre de tirage ne compte pas).
   Combien y a-t-il de tirages possibles ?
3. Parmi les tirages précédents, combien y en a-t-il où les deux dominos ont au moins un numéro en commun ?

Exercice 2. *Points du plan*

On considère n points dans le plan, on les relie deux à deux par des arêtes rouges ou bleues.

1. De combien de façons peut-on colorier les arêtes ?
2. Pour $n \geq 4$, montrer que de tout point sont issues au moins deux arêtes de la même couleur.
3. Pour $n \geq 6$, montrer que l'on peut trouver un triangle unicolore.

Exercice 3. *Couple de variables aléatoires.*

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de Pile soit égale à p, avec $p \in]0;1[$. On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce. On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :
— Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé.
— X indique le nombre de Pile obtenus aux lancers de la pièce.
— Y indique le nombre de Face obtenus aux lancers de la pièce.
Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.
   On rappellera la démonstration de la formule de la variance d'une telle variable aléatoire.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = k)$.
   On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.
3. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   — si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors $P(X = k, Z = n) = \binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$
   — si $n > N$ ou $k > n$ alors $P(X = k, Z = n) = 0$.
4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
5. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$, on a :
   $$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$
   En déduire la probabilité $P(X = k)$.
6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$.
   Quelle est la loi de la variable aléatoire Y (sans calcul) ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
   Déterminer la loi du couple (X, Y).