Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Dominos*

Un jeu de dominos est constitué de pièces rectangulaires : chaque domino est découpé en deux carrés dans chacun lesquels on peut avoir entre 1 et 6 points noirs dessinés.

1. Combien y a-t-il de dominos différents possibles ? On a $\binom{6}{2} = 15$ dominos possibles avec des nombres différents sur chaque moitié, et 6 dominos doubles donc un total de 21 dominos avec cette règle.
2. On considère un jeu de dominos constitué de tous les dominos différents que l'on peut envisager. On tire deux dominos parmi le jeu (l'ordre de tirage ne compte pas).

   Combien y a-t-il de tirages possibles ?

   Il y a donc $\binom{21}{2} = 210$ possibilités puisqu'il s'agit de choisir deux éléments distincts d'un ensemble qui en comporte 21.
3. Combien de tirages y a-t-il où les deux dominos ont au moins un numéro en commun ?

   Il est plus facile de compter les tirages avec aucun numéro commun : il s'agit de choisir les 4 numéros, soit $\binom{6}{4} = 15$ possibilités, puis de choisir avec lequel des 3 autres un numéro donné est associé en un domino. On peut alors compter les tirages avec un domino double et un normal sans que le double n'apparaisse sur le normal : on a exactement 6 possibilités pour le double, puis $\binom{5}{2} = 10$ pour le domino normal soit 60 tels tirages. Enfin, on peut tirer deux doubles : il y a $\binom{6}{2} = 15$ tels tirages. Ainsi, 120 tirages sont sans numéro commun, donc pour $210 - 120 = 90$ tirages de deux dominos, les deux dominos présentent un même nombre de points.

Exercice 2. *Points du plan*

On considère n points dans le plan, on les relie deux à deux par des arêtes rouges ou bleues.

1. De combien de façons peut-on colorier les arêtes ?

   Le nombre d'arêtes est $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. On a donc $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ coloriages possibles.
2. Pour $n \geq 4$, montrer que de tout point sont issues au moins deux arêtes de la même couleur.

   Si $n \geq 4$, de tout sommet partent au moins trois arêtes. S'il y en a moins de deux qui sont bleues, il y en a donc au moins deux rouges partant de ce sommet.
3. Pour $n \geq 6$, montrer que l'on peut trouver un triangle unicolore. Faisons le avec 6 points.

   On choisit un point A donné parmi les 6, il est relié au 5 autres donc parmi ces 5, il y en a au moins 3, B, C et D qui sont reliés à A par une arête d'une même couleur, disons rouge pour simplifier. Si le triangle BCD est entièrement bleu, notre problème est résolu, et sinon, il a une arête rouge qui forme avec A un triangle rouge.

   Si $n > 6$, il suffit d'appliquer ce raisonnement avec seulement 6 des n points pour prouver l'existence d'un triangle unicolore.

Exercice 3. *Couple de variables aléatoires.*

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de Pile soit égale à p, avec $p \in]0;1[$. On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé. On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de 6 obtenus, on lance alors n fois la pièce. On définit trois variables aléatoires X, Y et Z de la manière suivante :

— Z indique le nombre de 6 obtenus aux lancers du dé.
— X indique le nombre de Pile obtenus aux lancers de la pièce.
— Y indique le nombre de Face obtenus aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance. On rappellera la démonstration de la formule de la variance d'une telle variable aléatoire.

   Le lancer du dé équilibré pour déterminer si c'est un 6 ou non qui apparaît se modélise par une épreuve de Bernoulli. Comme on reproduit N fois cette expérience, et puisque les lancers sont indépendants, on obtient donc une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{1}{6})$.

Son espérance vaut donc $E(Z) = \frac{N}{6}$ et sa variance $V(Z) = N\frac{1}{6}\frac{5}{6} = \frac{5N}{36}$.
Rappelons la preuve du calcul de la variance d'une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{B}(N, p)$. On a alors $Z(\Omega) = [\![0, N]\!]$ et pour tout $k \in Z(\Omega)$, $P(Z = k) = \binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$ donc d'après le théorème de transfert :

$$E(Z^2) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} k^2$$

$$E(Z^2) = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} k^2$$

Or, pour $k \in [\![1, N]\!]$, on calcule :

$$k\binom{N}{k} = \frac{k \times N!}{k!(N-k)!} = \frac{N \times (N-1)!}{(k-1)!(N-k)!} = N\binom{N-1}{k-1}$$

Ainsi, on obtient :

$$E(Z^2) = \sum_{k=1}^{N} N\binom{N-1}{k-1} p^k (1-p)^{N-k} k$$

On opère alors le changement d'indice $i = k - 1$:

$$E(Z^2) = N \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} p^{i+1} (1-p)^{N-1-i} (i+1)$$

$$E(Z^2) = Np \left(\sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} p^i (1-p)^{N-1-i} i + \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} p^i (1-p)^{N-1-i} \right)$$

On reconnaît dans la première des deux sommes l'espérance d'une variable de loi $\mathcal{B}(N-1, p)$ et dans la deuxième la somme des probabilités de toutes les valeurs possibles de cette loi donc :

$$E(Z^2) = Np\left((N-1)p + 1\right)$$

On en déduit, grâce à la formule $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$:

$$V(Z) = N^2p^2 - Np^2 + Np - N^2p^2 = Np(1-p)$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{Z=n}(X = k)$. On distinguera les cas $k \leq n$ et $k > n$.
   Si $Z = n$, cela signifie que l'on a lancé exactement n fois la pièce, la loi conditionnelle de X sachant que $Z = n$ est $\mathcal{B}(n, p)$.
   Ainsi, si $k \leq n$, $P_{Z=n}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et si $k > n$, $P_{Z=n}(X = k) = 0$.
3. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   — si $0 \leq k \leq n \leq N$ alors $P(X = k, Z = n) = \binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$
   En effet, on a d'après la formule des probabilités composées

$$P(X = k, Z = n) = P(Z = n)P_{Z=n}(X = k)$$

   et il suffit de multiplier $P(Z = n) = \binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n}$ par $P_{Z=n}(X = k)$ que l'on a calculé à la question précédente pour obtenir le résultat attendu.
   — si $n > N$ ou $k > n$ alors $P(X = k, Z = n) = 0$.
   En effet, si $n > N$, l'événement $Z = n$ est impossible et si $k > n$, les événements $X = k$ et $Z = n$ sont incompatibles.
4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
   Les événements $(Z = n)_{n \in [\![0, N]\!]}$ forment un système complet donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X = 0) = \sum_{n=0}^{N} P(Z = n)P_{Z=n}(X = 0)$$

$$P(X=0)=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$
$$P(X=0)=\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}\left(\frac{5p}{6}\right)^n(1-p)^{N-n}$$

Sous cette forme, on reconnaît une formule du binôme de Newton :

$$P(X=0)=\left(\frac{5p}{6}+1-p\right)^N$$
$$P(X=0)=\left(1-\frac{p}{6}\right)^N$$

5. Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (k,n) tel que $0\leq k\leq n\leq N$, on a :

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n}=\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}.$$

On calcule d'abord :

$$A=\binom{n}{k}\binom{N}{n}$$
$$A=\frac{n!N!}{k!(n-k)!n!(N-n)!}$$
$$A=\frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$$

Puis :

$$B=\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$$
$$B=\frac{N!(N-k)!}{k!(N-k)!(n-k)!(N-n)!}$$
$$B=\frac{N!}{k!(n-k)!(N-n)!}$$

Et l'on constate que $A=B$.

En déduire la probabilité $P(X=k)$. A nouveau avec la formule des probabilités totales :

$$P(X=k)=\sum_{n=0}^{N}P(Z=n,X=k)$$
$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{N}\binom{n}{k}\binom{N}{n}p^k(1-p)^{n-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{N}\binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{N-n}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^N p^k\binom{N}{k}\sum_{n=k}^{N}\binom{N-k}{n-k}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{6}{5}\right)^n(1-p)^{n-k}$$

On fait le changement d'indice $i=n-k$:

$$P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^N p^k\binom{N}{k}\sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^{i+k}(1-p)^i$$
$$P(X=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^N p^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\sum_{i=0}^{N-k}\binom{N-k}{i}\left(\frac{1-p}{5}\right)^i$$
$$P(X=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^N p^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1+\frac{1-p}{5}\right)^{N-k}$$

$$P(X=k) = \binom{N}{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}\left(\frac{5}{6}\right)^{k}\left(\frac{p}{5}\right)^{k}\left(\frac{6-p}{5}\right)^{N-k}$$

$$P(X=k) = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^{k}\left(\frac{6-p}{6}\right)^{N-k}$$

$$P(X=k) = \binom{N}{k}\left(\frac{p}{6}\right)^{k}\left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}$$

6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{p}{6})$: c'est bien le résultat que l'on a obtenu à la question précédente.

   Quelle est la loi de la variable aléatoire Y (sans calcul) ? Puisque Y est définie de façon analogue à X, il suffit de remplacer p, la probabilité de Pile, par $q = 1-p$, la probabilité de Face pour obtenir la loi de Y : Y suit une loi binomiale de paramètre $(N, \frac{1-p}{6})$

7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

   On a : $P(X=0) = \left(1-\frac{p}{6}\right)^N$, $P(Y=0) = \left(1-\frac{1-p}{6}\right)^N$ donc :

$$P(X=0)P(Y=0) = \left(\left(1-\frac{p}{6}\right)\left(1-\frac{1-p}{6}\right)\right)^N.$$

$$P(X=0)P(Y=0) = \left(\frac{5}{6}-\frac{p(1-p)}{6^2}\right)^N.$$

   Or l'événement $(X=0, Y=0)$ est identique à $Z=0$ donc :

$$P(X=0, Y=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^N.$$

   Ainsi, si $p \neq 0$ et $p \neq 1$, les variables aléatoires ne sont pas indépendantes. Si $p=0$ ou $p=1$, l'une des deux variables aléatoires est une variable certaine (i.e. constante) égale à 0 donc les deux variables sont indépendantes.

   Déterminer la loi du couple (X, Y).

   On remarque que pour k, l des entiers naturels, l'événement $(X=k, Y=l)$ est identique à $(X=k, Z=k+l)$ donc on a si $k+l \leq N$:

$$P(X=k, Y=l) = \binom{k+l}{k}\binom{N}{k} + lp^k(1-p)^l\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-l}\left(\frac{1}{6}\right)^{k+l}.$$

   Si $k+l > n$, alors $P(X=k, Y=l) = 0$.