

Produits scalaires

Exercice 1. Produits scalaires sur \mathbb{R}^2

Les applications suivantes définissent-elles un produit scalaire sur \mathbb{R}^2 ?

1. $\varphi_1((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}$;
2. $\varphi_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 - x_2y_2$;
3. $\varphi_3((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 10x_2y_2$.

Exercice 2. Un produit scalaire sur les polynômes

Soit $n \geq 1$ et soit a_0, \dots, a_n des réels distincts deux à deux. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. Des exemples de produit scalaire

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$;
2. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $w \in E$ est telle que $w(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exercice 4. Une première application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Démontrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Exercice 5. Quand une inégalité en implique une autre...

Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Démontrer que $(x + y + z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

Exercice 6. Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier les cas d'égalité.

2. On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice 7. *Produit scalaire et théorème fondamental du calcul intégral*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$f^2(t) \leq (t - a) \int_a^t f'^2(u) du.$$

2. En déduire que

$$\int_a^b f^2(t) dt \leq \frac{(b - a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u) du.$$

Exercice 8. *Stricte convexité de la norme*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Soient x et y dans E tels que : $x \neq y$ et $\|x\| = \|y\| = 1$. Si $t \in]0, 1[$, montrer que $\|tx + (1 - t)y\| < 1$.

Exercice 9. *Polynômes de Tchebychev*

Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto \int_0^\pi P(\cos(t))Q(\cos(t))dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Vérifier que la famille des polynômes de Tchebychev est une base orthogonale de $(\mathbb{R}[X], \varphi)$. (Rappel : le n -ième polynôme de Tchebychev, T_n est celui qui vérifie $\forall t \in \mathbb{R}, T_n(\cos t) = \cos(nt)$).

Exercice 10. *Produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$*

$n \geq 2$ est un entier . On considère

$$\varphi_n : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, (P, Q) \mapsto P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

1. φ_n est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?
2. Déterminer une base orthonormée de $(\mathbb{R}_2[X], \varphi_2)$.

Exercice 11. *Polynômes de Legendre*

On définit pour, $n \in \mathbb{N}$:

$$L_n = \frac{d^n}{dX^n} ((X^2 - 1)^n).$$

1. (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .
(b) Montrer que L_n possède n racines simples réelles et que celles-ci sont dans $] - 1, 1[$.
2. Montrer que l'application qui à un couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ associe $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. (a) Montrer que la famille $(L_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
Ind. Effectuer des intégrations par parties.
(b) Déterminer la norme de L_n pour $n \in \mathbb{N}$.
Ind. Utiliser les intégrales de Wallis.
(c) En déduire l'existence d'une base orthonormée $(\tilde{L}_n)_{n \geq 0}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \deg \tilde{L}_n = n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

$$\inf \left\{ \int_{-1}^1 (t^n - P(t))^2 dt, P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \right\}.$$

Exercice 12. *Projection orthogonale sur un s.e.v. de dimension 1*

On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire euclidien canonique. Donner la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale d'image :

$$D = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. *Projection orthogonale sur un s.e.v. défini par des équations*

On munit \mathbb{R}^4 de son produit scalaire euclidien canonique. Soit :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}.$$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F .

Exercice 14. *Projection orthogonale dans $\mathbb{R}_n[X]$*

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire euclidien rendant la base canonique orthonormée. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$. Calculer la projection de 1 sur H et la distance de 1 à H .

Exercice 15. *Minimum d'ensembles d'intégrales*

Déterminer :

1.

$$\inf \left\{ \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2.

$$\inf \left\{ \int_0^\pi (\cos t - at - b)^2 dt \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 16. *Orthogonal d'une somme et d'une intersection en dimension finie*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 17. *Caractérisation des B.O.N.*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . Soient $p \leq n$ et (v_1, \dots, v_p) des vecteurs de E . Montrer l'équivalence entre :

1. (v_1, \dots, v_p) est une base orthonormée ;
2. $\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x, v_i \rangle^2$.

Exercice 18. *Calcul d'une projection orthogonale*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$I(P) = \int_0^1 (t^n - P(t))^2 dt.$$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad I(P) \geq I(Q).$$

On écrit $Q = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$ et on pose :

$$F = \frac{1}{X+n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X+k+1}.$$

2. Calculer $F(j)$ pour $0 \leq j \leq n-1$. En déduire F .
3. Montrer que $I(Q) = F(n)$. Calculer cette quantité.

Exercice 19. *Caractérisation des projecteurs orthogonaux par la norme*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Exercice 20. *Simplexe régulier*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . Montrer qu'il existe $n+1$ vecteurs unitaires x_1, \dots, x_{n+1} tels que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n+1\}^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle = -\frac{1}{n}.$$

Exercice 21. *Famille obtusangles*

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . On appelle *famille obtusangle* de vecteurs de E toute famille $(x_i)_{i \in I}$ telle que : $\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \quad \Rightarrow \quad \langle x_i, x_j \rangle < 0$. Montrer que toute famille obtusangle de vecteurs de E est de cardinal fini $\leq n+1$.

Exercice 22. *Base orthonormée et projection orthogonale sur une droite*

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de E .

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que les normes des projections orthogonales des e_i sur D soient toutes égales. Quelle est la valeur commune de ces normes.
2. Soit F un sous-espace de E tel que les projections orthogonales des e_i sur F soient de même norme. Calculer cette norme.

Exercice 23.

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite croissante de sous-espaces de E telle que : $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \dim E_i = i$. Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ une suite décroissante de réels ≥ 0 . Décrire l'ensemble des x de E tels que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad d(x, E_k) = a_k.$$