
Devoir à la maison

1 Dénombrements

1. Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle veut en inviter cinq à dîner.
 - (a) Combien de groupes différents d'invités existe-t-il ?
 - (b) Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne peuvent venir qu'ensemble ?
 - (c) Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux sont en mauvais termes et ne veulent plus se voir ?
2. Dans une classe de dix élèves, de combien de façons peut-on choisir trois élèves pour tenir les rôles de Cléante, Valère et Harpagon ?
3. Sur une feuille quadrillée, on a dessiné un rectangle de 10 carrés de long et de 6 carrés de large. En se déplaçant uniquement vers la droite ou vers le haut en suivant les lignes du quadrillage, combien y a-t-il de chemins pour aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit du rectangle ?
4. Anagrammes.
Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, BANANA.
5. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Le jeu est constitué de 8 coeurs, 8 piques, 8 trèfles et 8 carreaux de hauteurs 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As.
Combien de tirages différents peut-on obtenir :
 - (a) sans imposer de contraintes sur les cartes ;
 - (b) contenant 5 carreaux ou 5 piques ;
 - (c) contenant 2 carreaux et 3 piques ;
 - (d) contenant au moins un roi ;
 - (e) contenant au plus un roi ;
 - (f) contenant exactement 2 rois et exactement 3 piques (le roi de pique peut en faire partie).

2 Variables aléatoires

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geq 2$).

2.1 Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ième}} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X . Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.

3. Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^n P(Y = k) = 1.$$

4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

5. En déduire $E(Y)$.

2.2 Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leq p \leq n$, la variable aléatoire Z_p , par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^p X_i.$$

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1 .
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) . En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2 .
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p .
6. Soit $p \leq n-1$.
 - (a) Déterminer $P_{Z_p=k}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
 - (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$

- (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
(On raisonnera par récurrence sur p : les variables $X_1, X_2, \dots, X_p$ étant supposées suivre une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).