Devoir surveillé

Déterminants

Exercice 1. *Question de cours*

Rappeler précisément la formule de développement du déterminant par rapport à une ligne ou à une colonne d'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 2. *Déterminants* 3×3 *et* 4×4

Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}.$$

Exercice 3. *Fonction affine*

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j}+x$.

1. Montrer que la fonction $x\mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$, en déduire la valeur du déterminant suivant
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 4. *Déterminant d'un endomorphisme*

On note ainsi un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$E = \left\{ f : x\mapsto e^x P(x) \;\middle|\; P\in\mathbb{R}_3[X]\right\}$$

On note pour $k\in[\![0,3]\!]$:
$$f_k \;:\; x\mapsto e^x x^k.$$

1. Donner la matrice, dans la base (f_0,f_1,f_2,f_3), de $D\in\mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par :
$$D :\; f\mapsto f'.$$
2. En déduire le déterminant de cet endomorphisme D

Espaces euclidiens

Exercice 5. *Cauchy-Schwarz*

On note $E = \mathcal{C}([0,1])$ et F le sous-ensemble des fonctions de E qui ne s'annulent pas sur $[0,1]$ $(\forall x \in [0,1], f(x) \neq 0)$.
On munit E du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 fg.$$

Pour $f \in F$, on note :

$$\phi(f) = \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}.$$

1. Rappeler pourquoi $(.|.)$ est un produit scalaire.
2. Rappeler l'inégalité de Cauchy Schwarz et sa démonstration. Préciser, sans preuve, le cas d'égalité.
3. Montrer que l'on a : $\forall f \in F, \phi(f) \geq 1$.
4. Préciser l'ensemble des fonctions g de F telles que $\phi(g) = 1$.
5. ϕ est elle majorée sur F ? (Indication : considérer les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$)

Exercice 6. ***Non Bis*** : *Gram-Schmidt*

On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer la famille orthonormée obtenue à partir de cette base par l'algorithme de Gram-Schmidt.

Exercice 7. ***Bis*** : *Projecteur orthogonal ?*

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de l'espace préhilbertien E dont on note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme.

1. Montrer que p est orthogonal si et seulement si l'on a :

$$\forall x, y \in E, \ < p(x), y > = < x, p(y) >$$

2. Montrer que p est orthogonal si et seulement si l'on a :

$$\forall x \in E, \ \|p(x)\| \leq \|x\|$$