Corrigé du devoir surveillé

Déterminants

Exercice 1. *Question de cours*

Soit $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. Le développement du déterminant de M suivant la i-ème ligne est donné par :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(M_{i,j}),$$

où $M_{i,j}$ désigne la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de M.
De même, le développement suivant la j-ème colonne est :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(M_{i,j}).$$

Exercice 2. *Déterminants* 3×3 *et* 4×4

1.
$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$$

   On fait les opérations sur les colonnes $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & ca-ab & bc-ab \end{vmatrix}$$

   On remarque que la deuxième colonne se factorise par $(c-b)$ et la troisième par $(c-a)$:

$$D_1 = (c-b)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & 1 & 1 \\ ab & a & b \end{vmatrix}$$

   Puis on développe suivant la première ligne :

$$D_1 = (c-b)(c-a)(b-a)$$

2. Le déterminant 4×4 symétrique avec répétition de motifs :

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

   On fait l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a+2c+b & c & c & b \\ a+2c+b & a & b & c \\ a+2c+b & b & a & c \\ a+2c+b & c & c & a \end{vmatrix}$$

$$D_2 = (a+2c+b) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}$$

On fait alors les opérations classiques de pivot sur les lignes, on soustrait la première ligne aux trois suivantes :

$$D_2 = (a+2c+b)\begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

On développe alors par rapport à la première colonne :

$$D_2 = (a+2c+b)\begin{vmatrix} a-c & b-c & c-b \\ b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

On ajoute la deuxième colonne à la première :

$$D_2 = (a+2c+b)\begin{vmatrix} a+b-2c & b-c & c-b \\ a+b-2c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$D_2 = (a+2c+b)(a+b-2c)\begin{vmatrix} 1 & b-c & c-b \\ 1 & a-c & c-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

Et l'on termine en soustrayant la 1ère ligne à la 2ème :

$$D_2 = (a+2c+b)(a+b-2c)\begin{vmatrix} 1 & b-c & c-b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

$$D_2 = (a+2c+b)(a+b-2c)(a-b)^2$$

3.

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix}$$

On soustrait la première colonne aux deux suivantes :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 \end{vmatrix}$$

On factorise avec $b^4 - a^4 = (b-a)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$:

$$D_3 = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^4 & a^3+a^2b+ab^2+b^3 & a^3+a^2c+ac^2+c^3 \end{vmatrix}$$

On soustrait la deuxième colonne à la troisième :

$$D_3 = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^4 & a^3+a^2b+ab^2+b^3 & a^2(c-b)+a(c^2-b^2)+c^3-b^3 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = (b-a)(c-a)(c-b)(a^2+ac+ab+c^2+bc+b^2)$$

Exercice 3. *Fonction affine*

1. On soustrait la première colonne de la matrice $A(x)$ à toutes les autres colonnes, obtenant ainsi une matrice de même déterminant que la matrice $A(x)$ mais dans laquelle il n'y a plus aucun x qui apparaît ailleurs que dans la première colonne.
   Les éléments de cette première colonne sont des polynômes de degré 1 en x, on déduit du développement du déterminant par rapport à cette première colonne que $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction obtenue comme combinaison linéaire de ces fonctions polynômiales, et donc elle-même polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.

2. On applique le principe précédent en notant $A(x)$ la matrice à laquelle on a ajouté x à tous les coefficients. On a donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \det(A(x)) = \lambda x + \mu$$
Or $A(-a)$ est triangulaire et son déterminant vaut : $\det(A(-a)) = \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k - a)$.
De même, on a : $\det(A(-b)) = \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k - b)$.
On en déduit le système :
$$\begin{cases} -\lambda a + \mu = \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k - a) \\ -\lambda b + \mu = \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k - b) \end{cases}$$
En calculant $bL_1 - aL_2$, on obtient :
$$(b-a)\mu = b\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k - a) - a\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k - b)$$
Or $\det(A(0)) = \mu$ est le nombre cherché :
$$\det(A(0)) = \frac{b\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k - a) - a\prod_{k=1}^{n}(\alpha_k - b)}{b-a}$$

Exercice 4. *Déterminant d'un endomorphisme*

1. On calcule $D(f_k) = f_k'$:
$$f_k(x) = e^x x^k$$
$$f_k'(x) = e^x x^k + k e^x x^{k-1}$$
$$D(f_k) = f_k + k f_{k-1}$$
Donc la matrice de D dans la base (f_0, f_1, f_2, f_3) est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Cette matrice est triangulaire supérieure avec 1 sur la diagonale. Donc son déterminant est :
$$\det(D) = 1$$

Espaces euclidiens

Exercice 5. *Cauchy-Schwarz*

On note $E = \mathcal{C}([0,1])$ et F le sous-ensemble des fonctions de E qui ne s'annulent pas sur $[0,1]$ ($\forall x \in [0,1], f(x) \neq 0$).
On munit E du produit scalaire :
$$(f, g) = \int_0^1 fg.$$
Pour $f \in F$, on note :
$$\phi(f) = \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}.$$

1. Rappeler pourquoi $(.|.)$ est un produit scalaire.

— $(.|.)$ est symétrique car si f et g sont dans E, on a :

$$(f|g) = \int_0^1 fg$$

$$(f|g) = \int_0^1 gf$$

$$(f|g) = (g|f)$$

— $(.|.)$ est linéaire par rapport à la deuxième variable : si f est dans E, que $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(g, h) \in E^2$, on a :

$$(f|\lambda g + \mu h) = \int_0^1 f(\lambda g + \mu h)$$

$$(f|\lambda g + \mu h) = \int_0^1 (\lambda fg + \mu fh)$$

$$(f|\lambda g + \mu h) = \lambda \int_0^1 fg + \mu \int_0^1 fh$$

$$(f|\lambda g + \mu h) = \lambda(f|g) + \mu(f|h).$$

Par symétrie, $(.|.)$ est donc bilinéaire.

— $(.|.)$ est défini et positif puisque si $f \in E$, f^2 est continue et à valeur positives donc $(f|f) = \int_0^1 f^2 \geq 0$ et l'intégrale n'est nulle que si f^2 est nulle sur $[0, 1]$, c'est à dire si $f = 0$.

2. Rappeler l'inégalité de Cauchy Schwarz et sa démonstration. Préciser, sans preuve, le cas d'égalité.
Si x et y sont deux vecteurs de l'espace préhilbertien E muni du produit scalaire $(.|.)$, alors on a :

$$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)(y|y)}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires. Prouvons l'inégalité.
Soient donc x et y dans E. Si y est le vecteur nul, alors l'inégalité est vraie. Sinon, on définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (x + ty|x + ty).$$

f est une fonction à valeurs positives ou nulles puisque le produit scalaire est positif, et l'on a par bilinéarité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = (y, y)t^2 + 2(x|y)t + (x|x).$$

Ainsi, f est une fonction trinôme du second degré de signe constant, on en déduit que sont discriminant Δ est négatif ou nul, c'est à dire :

$$4(x|y)^2 - 4(x|x)(y|y) \leq 0$$

$$(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y).$$

Ces deux dernières quantités étant positives, leurs racines carrées vérifient la même inégalité.

3. Montrer que l'on a : $\forall f \in F, \phi(f) \geq 1$.
Soit $f \in F$, on suppose dans un premier temps que f est à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$. On a alors aussi $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ qui sont continues donc on peut appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|(\sqrt{f}|\frac{1}{\sqrt{f}})\right| \leq \sqrt{(\sqrt{f}|\sqrt{f})(\frac{1}{\sqrt{f}}|\frac{1}{\sqrt{f}})}$$

$$1 \leq \sqrt{\int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}}$$

$$1 \leq \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}$$

Si $f \in F$ n'est pas à valeurs positives, ceci signifie qu'elle est à valeurs toutes strictement négatives puisque f est continue et ne s'annule pas. On applique alors l'inégalité à $-f$ et l'on obtient le résultat souhaité.

4. Préciser l'ensemble des fonctions g de F telles que $\phi(g) = 1$.
   Si $g \in F$ est à valeurs positives, on a égalité si et seulement si $\sqrt{g}$ et $\frac{1}{\sqrt{g}}$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement si g est une fonction constante. Encore une fois, si g est plutôt à valeurs négatives, on fait le même raisonnement avec $-g$ et les fonctions g de F telles que $\phi(g) = 1$ sont donc les fonctions constantes (et non nulles).
5. ϕ est elle majorée sur F ? (Indication : considérer les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$) Suivant l'indication, on note $f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ et l'on calcule :

$$\phi(f_\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda x} \, \mathrm{dx} \int_0^1 e^{-\lambda x} \, \mathrm{dx}$$

$$\phi(f_\lambda) = \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} \frac{e^{-\lambda} - 1}{-\lambda}$$

$$\phi(f_\lambda) = \frac{e^\lambda (1 - e^{-\lambda})^2}{\lambda^2}$$

   Or $\frac{e^\lambda}{\lambda^2} \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'où $\phi(f_\lambda) \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et ϕ n'est pas majorée sur F.

Exercice 6. *Gram-Schmidt*

1. Pour montrer que $(u_1, \ldots, u_4)$ est libre, on prouve qu'elle est génératrice puisque ces deux propriétés sont équivalentes pour une famille de 4 vecteurs d'un espace de dimension 4.
   Notons V le s.e.v. engendré par ces vecteurs.
   V contient le vecteur $v = \frac{1}{3}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi V contient les 4 vecteurs $v - u_1$, $v - u_2$, $v - u_3$ et $v - u_4$ qui forment la base canonique de $\mathbb{R}^4$ donc $V = \mathbb{R}^4$.
2. Application de l'algorithme de Gram-Schmidt :
   on obtient une base orthonormée (e_1, e_2, e_3, e_4) en posant :
   (a) Pour le premier vecteur :

$$e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1$$

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Pour le deuxième vecteur, on calcule d'abord :

$$e_2' = u_2 - < u_2 | e_1 > e_1$$

$$e_2' = u_2 - \frac{2}{3} u_1$$

$$e_2' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   On calcule alors $\|e_2'\| = \sqrt{\frac{5}{3}}$ et l'on normalise e_2' en :

$$e_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   (c) Pour le troisième vecteur, on calcule d'abord :

$$e_3' = u_3 - < u_3 | e_1 > e_1 - < u_3, e_2 > e_2$$

$$e_3' = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 9 & -1 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

   Puis on détermine $\|e_3'\| = \frac{1}{15}\sqrt{183}$ et l'on normalise e_3' :

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{183}} \begin{pmatrix} 9 & -1 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) On fait enfin de la même manière le dernier calcul :

$$e'_4 = u_4 - < u_4 | e_1 > e_1 - < u_4, e_2 > e_2 - < u_4, e_3 > e_3$$

Et l'on calcule enfin $\|e'_4\|$ pour obtenir :

$$e_4 = \frac{1}{\|e'_4\|} e'_4$$

Exercice 7. ***Bis*** *: Projecteur orthogonal ?*

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de l'espace préhilbertien E dont on note $< .,. >$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme. On note F et G respectivement les s.e.v. sur lequel et dans la direction duquel p est le projecteur, c'est à dire que si $x \in E$, x s'écrit d'une unique manière $x = f + g$ avec $f \in F,\ g \in G$ et alors $p(x) = f$.

1. Montrer que p est orthogonal si et seulement si l'on a :

$$\forall x, y \in E,\ < p(x), y > = < x, p(y) >$$

On raisonne par double implication.

— Prouvons d'abord : $G = F^{\perp} \Rightarrow \forall x, y \in E,\ < p(x), y > = < x, p(y) >$
On suppose donc $G = F^{\perp}$ et l'on considère $x,\ y \in E$. On a donc $f,\ a \in F$ et $g,\ b \in G$ tels que $x = f + g$ et $y = a + b$. On calcule enfin en tenant compte que tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G :

$$< p(x), y > = < f, a + b > = < f, a > + < f, b > = < f, a >$$

$$< x, p(y) > = < f + g, a > = < f, a > + < g, a > = < f, a >$$

— Prouvons maintenant : $\forall x, y \in E,\ < p(x), y > = < x, p(y) > \Rightarrow G = F^{\perp}$
On suppose donc $\forall x, y \in E,\ < p(x), y > = < x, p(y) >$.
Si x est un vecteur quelconque de F et y de G, on en déduit :

$$< x, y > = < x, 0_E > = 0$$

Ceci signifie $G \subset F^{\perp}$.
On vérifie enfin que $F^{\perp} \subset G$ en considérant $x \in F^{\perp}$. x peut s'écrire $x = f + g$ où $f \in F,\ g \in G$. On a alors :

$$< x, f > = 0$$

$$< f + g, f > = 0$$

$$< f, f > + < g, f > = 0$$

Or $< g, f > = 0$ puisque $G \subset F^{\perp}$ donc $< f, f > = 0$, signifiant que $f = 0_E$ et finalement que $x = g \in G$.

2. Montrer que p est orthogonal si et seulement si l'on a :

$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$$

On laisse le soin au lecteur de ce corrigé de vérifier que si $G = F^{\perp}$, cette inégalité est vérifiée et l'on prouve la réciproque.
On suppose donc que l'inégalité est vérifiée et l'on considère $f \in F$ et $g \in G$. Pour t un réel, on a alors :

$$\|p(f + tg)\| \leq \|f + tg\|$$

$$\|f\| \leq \|f + tg\|$$

$$\|f\|^2 \leq \|f + tg\|^2$$

$$0 \leq \|g\|^2 t^2 + 2 < f, g > t$$

Ainsi $t \mapsto \|g\|^2 t^2 + 2 < f, g > t$ admet un minimum en $t = 0$ donc sa dérivée en 0 est nulle et donc $2 < f, g > = 0$.
Ceci prouve bien que $G \subset F^{\perp}$ et l'on peut conclure en procédant comme à la fin du paragraphe précédent.