# Séries numériques

**Exercice 1.** *Quelques convergences*
Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

**1**. $u_n = n\sin(1/n)$ **2**. $u_n = \dfrac{n^n}{2^n}$ **3**. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

**4**. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5**. $u_n = 1-\cos\dfrac{\pi}{n}$ **6**. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

**7**. $u_n = a^n n!,\ a\in\mathbb{R}$ **8**. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$ **9**. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

**10**. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$. **11**. $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$

**Exercice 2.** *Critères de convergence*
Etudier les séries de terme général suivant :

**1**. $u_n = \dfrac{n!}{n^{an}},\ a\in\mathbb{R}$ **2**. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$

**3**. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^{n(-1)^n}$ **4**. $u_n = \dfrac{n^\alpha(\ln n)^n}{n!}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

**Exercice 3.** *Développements limités*
Donner la nature des séries numériques $\sum u_n$ suivantes :

**1**. $u_n = \sqrt{\cos\dfrac{1}{n}-1}$ **2**. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

**3**. $u_n = \left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha},\ \alpha\geq 0$ **4**. $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3},\ a\in\mathbb{R}$

**5**. $e^{\frac{1}{n}}-a-\dfrac{b}{n},\ a,b\in\mathbb{R}$ **6**. $\dfrac{1}{n^\alpha}\left((n+1)^{1+1/n}-(n-1)^{1-1/n}\right),\ \alpha\in\mathbb{R}$.

Indication : procéder en effectuant un développement limité du terme général.

**Exercice 4.** *Séries de Bertrand*
Etudier, suivant la valeur de $\alpha$ et $\beta$, la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}.$$

Indication : séparer 3 cas, suivant la position de $\alpha$ par rapport à 1.
— Pour $\alpha>1$, comparer à une série de Riemann $1/n^\gamma$ avec $1<\gamma<\alpha$.
— Pour $\alpha=1$, comparer à une intégrale.
— Pour $\alpha<1$, comparer encore avec une série de Riemann.

**Exercice 5.** *Séries plus originales*
Etudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :
1. $u_n = 1/n$ si $n$ est un carré, et 0 sinon.
2. $u_n = \arctan(n+a)-\arctan(n)$, avec $a>0$.

Indications :
- Se ramener à la somme des $1/k^2$, pour des bornes bien choisies.
- Utiliser l'inégalité des accroissements finis, ou faire un développement limité de arctan au voisinage de $+\infty$ en utilisant la formule $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$.

**Exercice 6.** *Convergence de séries plus ardues*
Etudier la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\textbf{1. } u_n = \frac{\sin n^2}{n^2} \qquad \textbf{2. } u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$$
$$\textbf{3. } u_n = \frac{\cos(n^2\pi)}{n \ln n}$$

**Exercice 7.** *Convergence absolue*
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}\int_0^1 t^n f(t)dt$ est absolument convergente.
Indication : étudier la convergence absolue. Utiliser le fait que $f$ est bornée sur $[0,1]$.

**Exercice 8.** *Valeur absolue et sinus*
Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{|\sin(n)|}{n}$.

**Exercice 9.** *ENSI PC*
Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$ ?

**Exercice 10.** *ENSI PC*
Soit $(u_n)$ une suite réelle à termes tous non nuls telle que :

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{et} \quad \frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b.$$

Etudier en fonction de $a$ et $b$ la convergence de la série.

**Exercice 11.** *Centrale PC**
Montrer que la série :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$$

converge, puis donner une valeur approchée à $10^{-4}$ près de sa somme.

**Exercice 12.** *Centrale PC*
Etant donnée la suite de terme général :

$$u_n = (n^4 + n^2)^{\frac{1}{4}} - P(n)^{\frac{1}{3}}$$

où $P$ est un polynôme réel.
A quelle condition sur $P$ la série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

**Exercice 13.** *Cauchy-Schwarz généralisé*
Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.
1. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
2. Montrer que $\sum (u_n + v_n)^2$ converge, et que l'on a :

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} v_n^2}$$