

Forme canonique

Quelques calculs généraux pour commencer

Calcul 1.1



Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $(2x + 3)^2$

d) $(-\sqrt{3}t - \sqrt{15})^2$

b) $(3y - 4)^2$

e) $\left(\frac{3}{2}z + 2\right)^2$

c) $(-u + \sqrt{7})^2$

f) $\left(\frac{2}{5}v - \frac{2}{3}\right)^2$

Calcul 1.2 — Quelques factorisations.



Factoriser les expressions suivantes.

a) $x^2 - 25$

d) $u^2 + 6u + 9$

b) $4t^2 - 9$

e) $9v^2 - 12v + 4$

c) $\frac{2}{9}y^2 - \frac{4}{5}$

f) $2z^2 + 10\sqrt{2}z + 25$..

Calcul 1.3 — Quelques équations.



Résoudre les équations suivantes.

On donnera dans chaque cas l'ensemble des solutions.

a) $x^2 = 0$

d) $(-\sqrt{3}y + \sqrt{6})^2 = 0$

b) $z^2 = 17$

e) $2u^2 - 10 = 0$

c) $(2t + 10)^2 = 0$

f) $-\frac{3}{4}v^2 + \frac{4}{15} = 0$

Changements de forme

Calcul 1.4 — De la forme canonique à la forme développée.



Développer et réduire :

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------|---|----------------------|
| a) $(X - 3)^2 + 7$ | <input type="text"/> | d) $\sqrt{3}(2X - 1)^2 - 2\sqrt{3}$... | <input type="text"/> |
| b) $2(X + 3)^2 - 5$ | <input type="text"/> | e) $\frac{3}{4}\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + 1$ | <input type="text"/> |
| c) $-(X + \sqrt{2})^2 + 6$ | <input type="text"/> | f) $\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{3}X - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}$.. | <input type="text"/> |

Calcul 1.5 — Formes canoniques (I).



Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X - \alpha)^2 + \beta$.

- | | |
|-------------------------|----------------------|
| a) $X^2 + 2X + 2$ | <input type="text"/> |
| b) $X^2 + 4X - 1$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.6 — Formes canoniques (II).



Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X - \alpha)^2 + \beta$.

- | | | | |
|--------------------------|----------------------|----------------------------|----------------------|
| a) $-X^2 + 4X - 5$ | <input type="text"/> | c) $-9X^2 + 36X + 4$ | <input type="text"/> |
| b) $4X^2 - 8X - 3$ | <input type="text"/> | d) $-2X^2 - 20X - 17$ | <input type="text"/> |

Calcul 1.7 — Formes canoniques (III).



Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X - \alpha)^2 + \beta$.

- | | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $X^2 + 3X + \frac{1}{4}$ | <input type="text"/> | d) $-\frac{9}{8}X^2 - \frac{1}{2}X - 4$. | <input type="text"/> |
| b) $\frac{1}{4}X^2 + X - 1$ | <input type="text"/> | e) $\frac{1}{2}X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{3}{4}$.. | <input type="text"/> |
| c) $\frac{2}{9}X^2 + 8X + \frac{1}{7}$... | <input type="text"/> | f) $-\frac{4}{5}X^2 - \frac{5}{6}X - \frac{6}{7}$. | <input type="text"/> |

Calcul 1.8 — Formes canoniques à paramètre (I).



Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X - \alpha)^2 + \beta$.

a) $X^2 + 3X + \lambda$

b) $\frac{1}{4}X^2 + \lambda X - 2$

c) $\lambda X^2 + 8X + 5$

Calcul 1.9 — Formes canoniques à paramètre (II).



Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Mettre les polynômes suivants sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme $a(X - \alpha)^2 + \beta$.

a) $-3X^2 - \lambda X + 2$

c) $-\frac{4}{5}X^2 - \frac{5}{6}\lambda X$

b) $\frac{1}{2}X^2 + \frac{2\lambda}{3}X + \frac{3\lambda}{4}$

Des représentations graphiques

Calcul 1.10



Voici la courbe représentative d'un polynôme du second degré.

Quelle est sa forme canonique ?

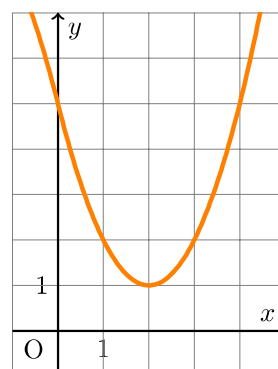
(a) $(X + 2)^2 - 1$

(b) $(X - 2)^2 - 1$

(c) $(X + 2)^2 + 1$

(d) $(X - 2)^2 + 1$

.....



Calcul 1.11



Voici la courbe représentative d'un polynôme du second degré.

Quelle est sa forme canonique ?

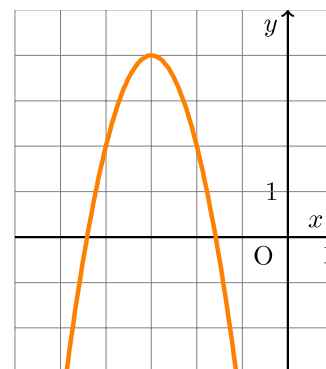
(a) $-2(X + 3)^2 - 4$

(b) $-2(X - 3)^2 - 4$

(c) $-2(X + 3)^2 + 4$

(d) $-2(X - 3)^2 + 4$

.....



Calcul 1.12



On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Après avoir calculé sa forme canonique, déterminer quelle est sa représentation graphique.

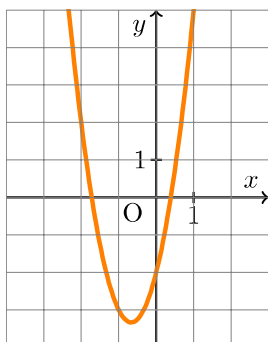


figure 1

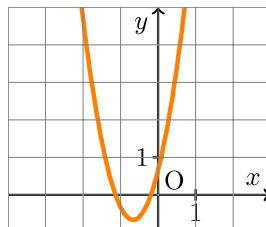


figure 2

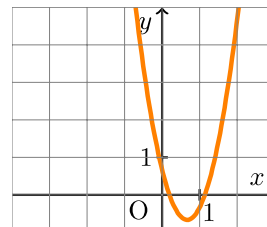


figure 3

Quelle est sa représentation graphique ?

(a) figure 1

(b) figure 2

(c) figure 3

.....

Calcul 1.13



On considère la fonction g définie par $g(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t - 1$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Après avoir calculé sa forme canonique, déterminer quelle est sa représentation graphique.

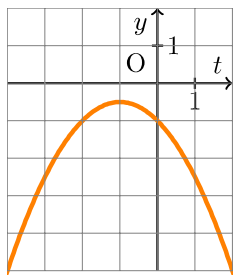


figure 1

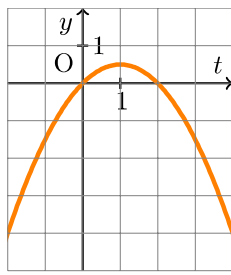


figure 2

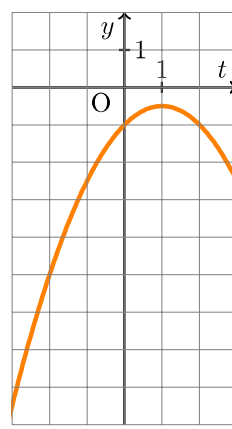


figure 3

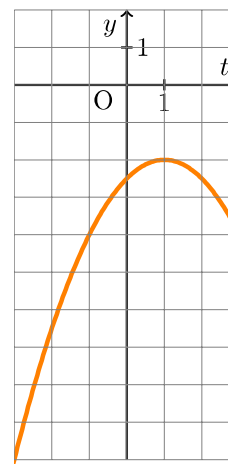


figure 4

Quelle est sa représentation graphique ?

(a) figure 1

(b) figure 2

(c) figure 3

(d) figure 4

.....

Calculs plus avancés

Calcul 1.14 — Forme canonique et inégalités.



Dans chacun des cas, déterminer si la proposition est « vraie » ou « fausse » à l'aide de la forme canonique d'un polynôme du second degré.

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq \frac{1}{2}$
- b) $\forall t \in \mathbb{R}, t^2 + 3t > -1$
- c) $\forall z \in \mathbb{R}, 3z + z^2 < 2z^2 - 4$..
- d) $\forall v \in \mathbb{R}, \frac{4}{49}v^2 + \frac{61}{9} \geq \frac{20}{21}v$..

Calcul 1.15 — Forme canonique et équations de cercles.



Dans chacun des cas, reconnaître le cercle défini par l'équation cartésienne donnée.

On donnera son centre Ω et son rayon r .

- a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1 = 0$
- b) $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$
- c) $x^2 + y^2 - x - \frac{2}{3}y = \frac{23}{36}$
- d) $x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x + \frac{8}{3}y = -\frac{193}{144}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{l}
 -2(X+5)^2+33 \quad -\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\lambda\right)^2+\frac{125}{576}\lambda^2 \quad \Omega=(1,-2) \text{ et } r=2 \quad \text{vraie} \\
 \left(\frac{\sqrt{2}}{3}y-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y+\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad 9y^2-24y+16 \quad (u+3)^2 \quad \frac{2}{9}(X+18)^2-\frac{503}{7} \quad \{-5\} \\
 (2t-3)(2t+3) \quad \Omega=\left(-\frac{5}{4},-\frac{4}{3}\right) \text{ et } r=\sqrt{2} \quad \{\sqrt{2}\} \quad u^2-2\sqrt{7}u+7 \quad \text{vraie} \\
 X^2-6X+16 \quad \Omega=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \text{ et } r=1 \quad -\frac{4}{5}\left(X+\frac{25}{48}\right)^2-\frac{2}{4}\frac{581}{032} \quad \left(X+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\lambda \\
 \lambda\left(X+\frac{4}{\lambda}\right)^2-\frac{16}{\lambda}+5 \quad \frac{1}{2}\left(X+\frac{2\lambda}{3}\right)^2-\frac{2\lambda^2}{9}+\frac{3\lambda}{4} \quad (X+1)^2+1 \quad -\frac{9}{8}\left(X+\frac{2}{9}\right)^2-\frac{71}{18} \\
 \{0\} \quad -X^2-2\sqrt{2}X+4 \quad \frac{1}{2}\left(X+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{19}{36} \quad \frac{9}{4}z^2+6z+4 \quad -3\left(X+\frac{\lambda}{6}\right)^2+\frac{\lambda^2}{12}+2 \\
 \frac{4}{25}v^2-\frac{8}{15}v+\frac{4}{9} \quad 2X^2+12X+13 \quad (X+2)^2-5 \quad \textcircled{c} \quad \{-\sqrt{5},\sqrt{5}\} \quad \text{fausse} \\
 -9(X-2)^2+40 \quad 3t^2+6\sqrt{5}t+15 \quad \textcircled{d} \quad \left\{-\frac{4\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{15}\right\} \quad \frac{1}{4}(X+2)^2-2 \\
 (x-5)(x+5) \quad 4x^2+12x+9 \quad (3v-2)^2 \quad 4(X-1)^2-7 \quad \textcircled{a} \quad \frac{5}{18}X^2+\frac{10}{9}X+\frac{8}{9} \\
 \frac{3}{4}X^2+\frac{3}{4}X+\frac{19}{16} \quad \Omega=(-3,5) \text{ et } r=4 \quad (\sqrt{2}z+5)^2 \quad \frac{1}{4}(X+2\lambda)^2-\lambda^2-2 \\
 4\sqrt{3}X^2-4\sqrt{3}X-\sqrt{3} \quad \{-\sqrt{17},\sqrt{17}\} \quad \textcircled{c} \quad \text{fausse} \quad -(X-2)^2-1 \quad \left(X+\frac{3}{2}\right)^2-2
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 154