

# Fractions

## Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

## Calculs dans l'ensemble des rationnels

### Calcul 1.1 — Simplification de fractions.



Simplifier les fractions suivantes (la lettre  $k$  désigne un entier naturel).

a)  $\frac{32}{40}$  .....

c)  $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$  .....

b)  $8^3 \times \frac{1}{4^2}$  .....

d)  $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$  .....

### Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a)  $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$  .....

c)  $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$  .....

b)  $\frac{2}{3} - 0,2$  .....

d)  $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$  .....

### Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a)  $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$  .....

b)  $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$  .....

c)  $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$  .....

d)  $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$  .....

### Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire  $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$  sous forme d'une fraction irréductible. ....

### Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a)  $\frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$  ...

c)  $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$  .....

b)  $\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$  .....

d)  $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$  ...

### Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a)  $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  .....
- b)  $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$  pour  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ , distincts deux à deux. ....
- c)  $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ . ....

### Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier  $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , en utilisant la formule  $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ . ....

### Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit  $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Écrire les fractions suivantes sous la forme  $a + \frac{b}{X}$  avec  $a$  et  $b$  entiers et  $X \in \mathbb{R}$ .

- a)  $\frac{29}{6}$  .....       b)  $\frac{k}{k-1}$  ...       c)  $\frac{3x-1}{x-2}$  ..

### Calcul 1.9 — Un produit de fractions.



Soit  $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . On donne  $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$  et  $B = (1+t^2)(1+t)^2$ .

Simplifier  $AB$  autant que possible. ....

## Comparaison

### Calcul 1.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a)  $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$  .....       b)  $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$  .....       c)  $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$  .....

### Calcul 1.11 — Produit en croix.



Les nombres  $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$  et  $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$  sont-ils égaux? Oui ou non? .....

### Calcul 1.12 — Produit en croix.



On pose  $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$  et  $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$  : a-t-on  $A > B$ ,  $A = B$  ou  $A < B$ ? .....

### Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{-1}{n(n+1)^2} & -\frac{ab}{a-b} & 2 & 3 & \frac{12}{11} > \frac{10}{12} & \frac{1}{2} & 247 & \frac{n^3+n}{n+1} & 1\ 000 & \frac{1}{9} \\ 2t & 2\ 022 & \frac{-10}{3} & \frac{4}{5} & 3 + \frac{5}{x-2} & \frac{3}{2}n & \frac{203}{24} & \frac{7}{15} & \frac{1}{6} & \frac{3}{5} > \frac{5}{9} & 9 \\ 4 + \frac{5}{6} & A > B & 1 & \frac{16}{35} & 2^5 & -2 \times 3^{3k-2} & \text{Non} & 1 + \frac{1}{k-1} & \frac{125}{25} = \frac{105}{21} \end{array}$$

# Puissances

## Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

### Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

|                                                 |                                                         |                                                                                          |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $10^5 \cdot 10^3$ ..... <input type="text"/> | c) $\frac{10^5}{10^3}$ ..... <input type="text"/>       | e) $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ..... <input type="text"/> |
| b) $(10^5)^3$ ..... <input type="text"/>        | d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ..... <input type="text"/> | f) $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ..... <input type="text"/>        |

### Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $a^n$  avec  $a$  et  $n$  deux entiers relatifs.

|                                               |                                                        |                                                                      |
|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| a) $3^4 \cdot 5^4$ ..... <input type="text"/> | c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$ ..... <input type="text"/>     | e) $\frac{6^5}{2^5}$ ..... <input type="text"/>                      |
| b) $(5^3)^{-2}$ ..... <input type="text"/>    | d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ..... <input type="text"/> | f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ..... <input type="text"/> |

### Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme  $2^n \cdot 3^p$ , où  $n$  et  $p$  sont deux entiers relatifs.

|                                                                                  |                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ..... <input type="text"/> | c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ..... <input type="text"/>              |
| b) $2^{21} + 2^{22}$ ..... <input type="text"/>                                  | d) $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$ ..... <input type="text"/> |

### Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

|                                                                                                       |                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ..... <input type="text"/>                       | c) $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ..... <input type="text"/>                 |
| b) $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ..... <input type="text"/> | d) $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ..... <input type="text"/> |

### Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel  $x$ .

|                                                                                 |                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$ ..... <input type="text"/> | c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$ ..... <input type="text"/> |
| b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$ ..... <input type="text"/> | d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$ ..... <input type="text"/>           |

## Réponses mélangées

|                 |        |                  |                       |               |          |                 |                       |
|-----------------|--------|------------------|-----------------------|---------------|----------|-----------------|-----------------------|
| $\frac{x}{x+1}$ | $15^4$ | $\frac{2x}{x+1}$ | $2^{21} \cdot 3$      | $10^{15}$     | 11       | $5^{-6}$        | $2^{38} \cdot 3^{26}$ |
| $10^2$          | $10^8$ | $10^{-2}$        | $2^{-4} \cdot 3^{-1}$ | $2^6 \cdot 5$ | $3^5$    | $(-7)^{-2}$     |                       |
| $\frac{2}{x-2}$ | $10^4$ | 8                | $2^7$                 | $10^{-8}$     | $3^{10}$ | $\frac{1}{x-2}$ | $3^{28}$ 2            |

► Réponses et corrigés page 88

**Prérequis**

Les identités remarquables.

## Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable  $x$  représente un nombre réel (ou complexe).

### Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de  $x$ .

- |                                            |                      |                                 |                      |
|--------------------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ ..... | <input type="text"/> | d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$ .... | <input type="text"/> |
| b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$ .....                | <input type="text"/> | e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ .... | <input type="text"/> |
| c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$ ....            | <input type="text"/> | f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ .....   | <input type="text"/> |

### Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de  $x$ .

- |                                                                  |                      |
|------------------------------------------------------------------|----------------------|
| a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$ .....                    | <input type="text"/> |
| b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ .....                           | <input type="text"/> |
| c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ ..... | <input type="text"/> |
| d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$ .....                             | <input type="text"/> |
| e) $(x^2+\sqrt{2}x+1)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$ .....         | <input type="text"/> |
| f) $(x^2+x+1)^2$ .....                                           | <input type="text"/> |

## Factoriser

### Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle  $x$  suivantes.

- |                                       |                      |
|---------------------------------------|----------------------|
| a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$ ..... | <input type="text"/> |
| b) $25 - (10x+3)^2$ .....             | <input type="text"/> |
| c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$ .....  | <input type="text"/> |
| d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$ ..... | <input type="text"/> |

### Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de  $ax^2 + bx + c$  est  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$  (où  $a \neq 0$ ).

- |                         |                      |                           |                      |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ ..... | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ .....  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ ..... | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ ..... | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ ..... | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ ..... | <input type="text"/> |

### Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |                                      |                      |                                            |                      |
|--------------------------------------|----------------------|--------------------------------------------|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ .....           | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ .....                  | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ..... | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..    | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ .....            | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$ .. | <input type="text"/> |

### Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.



Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- |                                                                                                       |                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ .....                                                                                    | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ .....                                                        | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ .....                                                                              | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ .....                                                                  | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$ .. | <input type="text"/> |

### Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 & (a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2) & (x + 1)(x + 2) & & & & \\
 2 + x^3 - x^4 - x^5 & x^5 - x^3 - x^2 + 1 & (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) & & & & \\
 2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right) & 2(3x - 4)(10x + 3) & 1 + x^4 & (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) & & & \\
 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) & (x + y - z)(x + y + z) & 4(5x + 4)(-5x + 1) & & & & \\
 -1 - 3x - 3x^2 + x^3 & x^4 + x^2 + 1 & 3(14x + 3y)(-4x + y) & (x + 1)(y + 1) & & & \\
 x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 & (x - 1)^2 & (x + y)(x + 1)^2 & -6(6x + 7) & & & \\
 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8} & -5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right) & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) & (x - 1)(y - 1) & (x + 2)^2 & & \\
 -2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4 & x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 & x^5 - x^3 + x^2 - 1 & -28 + 21x & & & \\
 -8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4) & 3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right) & -8(x + 1)(x + 16) & & & & 
 \end{array}$$

► Réponses et corrigés page 89

## Racines carrées

### Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

## Premiers calculs

### Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles  $\sqrt{\cdot}$  qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a)  $\sqrt{(-5)^2}$  .....

d)  $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$  .....

b)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$  .....

e)  $\sqrt{(3 - \pi)^2}$  .....

c)  $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$  .....

f)  $\sqrt{(3 - a)^2}$  .....

### Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a)  $(2\sqrt{5})^2$  .....

e)  $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$  .....

b)  $(2 + \sqrt{5})^2$  .....

f)  $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$  .....

c)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$  .....

g)  $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$  .....

d)  $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$  .....

h)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$  .....

## Avec la méthode de la quantité conjuguée

### Calcul 4.3



Écrire les expressions suivantes sans racines carrées au dénominateur.

a)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$  .....

e)  $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

b)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$  .....

f)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$  .....

c)  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$  .....

g)  $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$  .....

d)  $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$  .....

h)  $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$  .....

#### Calcul 4.4



Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{\phantom{000000}}$$

### Calculs variés

#### Calcul 4.5 — Avec une variable.



On considère la fonction  $f$  qui à  $x > 1$  associe  $f(x) = \sqrt{x-1}$ .

Pour tout  $x > 1$ , calculer et simplifier les expressions suivantes.

|                                                |                                |
|------------------------------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ .....               | $\frac{f'(x)}{f(x)}$ .....     |
| b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ ..... | e) $f(x) + 4f''(x)$ .....      |
| c) $\sqrt{x+2f(x)}$ .....                      | f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$ ..... |

#### Calcul 4.6 — Mettre au carré.



Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

|                                                  |                                                    |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ..... | b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ..... |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------|

#### Calcul 4.7 — Méli-mélo.



Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

|                                                 |                                                         |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ .....        | d) $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ .....                       |
| b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ .....                   | e) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ .....                 |
| c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ..... | f) $\frac{1}{2}\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ..... |

#### Calcul 4.8



On note  $A = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$ . Simplifier  $A$

On commencera par exprimer  $A^3$  en fonction de  $A$ . .....

#### Réponses mélangées

|                                  |                   |                                        |                                                 |                                     |                                                 |
|----------------------------------|-------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $12\sqrt{7}$                     | $-4(x-1)^2$       | $-(\sqrt{2} + \sqrt{3})$               | $9 - \frac{10}{3}\sqrt{2}$                      | 20                                  | $-\frac{3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2}$ |
| $\sqrt{2}$                       | $1 + \sqrt{5}$    | $2\sqrt{2}$                            | $\frac{x}{\sqrt{x-1}}$                          | $ 3-a $                             | $50 - 25\sqrt{3}$                               |
| $\sqrt{3}-1$                     | $3 + \sqrt{2}$    | $1 + \sqrt{2}$                         | $2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$ | 5                                   | $1 + \sqrt{x-1}$                                |
| $\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$ | $\sqrt{3}$        | $\sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6} - 2$ | 1                                               | $2\sqrt{2}$                         | $\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$                      |
| $\ln(1 + \sqrt{2})$              | $1 + \sqrt{3}$    | $-\sqrt{3} + 2$                        | $\pi - 3$                                       | 12                                  | $\sqrt{7} - 2$                                  |
| $1 + \sqrt{2}$                   | $-11 + 5\sqrt{5}$ | $x - \sqrt{x^2 - 1}$                   | 10                                              | $\frac{\sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}}{4}$ | $3 - 2\sqrt{2}$                                 |
|                                  |                   |                                        |                                                 |                                     | $1 - \sqrt{10} + \sqrt{15}$                     |

► Réponses et corrigés page 91

## Expressions algébriques

## Prérequis

Identités remarquables.

## Équations polynomiales

## Calcul 5.1 — Cubique.

Soit  $a$  un nombre réel tel que  $a^3 - a^2 + 1 = 0$ .Exprimer les quantités suivantes sous la forme  $xa^2 + ya + z$  où  $x, y, z$  sont trois nombres rationnels.

a)  $(a + 2)^3$  .....

c)  $a^{12}$  .....

b)  $a^5 - a^6$  .....

d)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$  .....

## Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit  $i$  un nombre tel que  $i^2 = -1$ .Exprimer les quantités suivantes sous la forme  $x + iy$  où  $x, y$  sont deux réels.

a)  $(3 + i)^2$  .....

c)  $(3 - i)^3$  .....

b)  $(3 - i)^2$  .....

d)  $(3 - 2i)^3$  .....

## Calcul 5.3



Même exercice.

a)  $(4 - 5i)(6 + 3i)$  .....

c)  $(-4 + i\sqrt{5})^3$  .....

b)  $(2 + 3i)^3(2 - 3i)^3$  .....

d)  $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$  .....

## Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit  $a$  un nombre distinct de 1 tel que  $a^5 = 1$ . Calculer les nombres suivants :

a)  $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$  .....

b)  $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$  .....

c)  $\prod_{k=0}^{1234} a^k$  .....

d)  $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$  .....

e)  $\sum_{k=1}^{99} a^k$  .....

f)  $\prod_{k=0}^4 (2 - a^k)$  .....

# Expressions symétriques

## Calcul 5.5 — Inverse.



Soit  $x$  un réel non nul. On pose  $a = x - \frac{1}{x}$ . Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a$  uniquement.

a)  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  ....       b)  $x^3 - \frac{1}{x^3}$  ....       c)  $x^4 + \frac{1}{x^4}$  ....

## Calcul 5.6 — Trois variables.



Soient  $x, y, z$  trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx \quad \text{et} \quad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de  $a, b, c$  uniquement.

a)  $x^2 + y^2 + z^2$  .....

b)  $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$  .....

c)  $x^3 + y^3 + z^3$  .....

d)  $(x + y)(y + z)(z + x)$  .....

e)  $x^2yz + y^2zx + z^2xy$  .....

f)  $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$  .....

## Calcul 5.7



Même exercice.

a)  $x^3(y + z) + y^3(z + x) + z^3(x + y)$  .....

b)  $x^4 + y^4 + z^4$  .....

c)  $\frac{x}{(x - y)(x - z)} + \frac{y}{(y - z)(y - x)} + \frac{z}{(z - x)(z - y)}$  .....

d)  $\frac{x^2}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^2}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^2}{(z - x)(z - y)}$  .....

e)  $\frac{x^3}{(x - y)(x - z)} + \frac{y^3}{(y - z)(y - x)} + \frac{z^3}{(z - x)(z - y)}$  .....

## Réponses mélangées

|                    |                  |           |                            |            |                |                    |
|--------------------|------------------|-----------|----------------------------|------------|----------------|--------------------|
| $-4 + 43i\sqrt{5}$ | $a^4 + 4a^2 + 2$ | $ab - c$  | $-1$                       | $-9 - 46i$ | $a^3 + 3a$     | $7a^2 + 12a + 7$   |
| $39 - 18i$         | $18 - 26i$       | $8 - 6i$  | $a^4 - 4a^2b + 4ac + 2b^2$ | $a^2 + 2$  | $3$            | $1$                |
| $8 + 6i$           | $ac$             | $1$       | $0$                        | $31$       | $a$            | $a^2 - 1$          |
| $-a^2 + 1$         | $-2ac + b^2$     | $ab - 3c$ | $0$                        | $a^2 - 2b$ | $4a^2 - a - 3$ | $1$                |
|                    |                  |           |                            |            |                | $a^2b - ac - 2b^2$ |
|                    |                  |           |                            |            |                | $a^3 - 3ab + 3c$   |

► Réponses et corrigés page 93

# Équations du second degré

## Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

## Recherche de racines

### Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

a)  $x^2 - 6x + 9 = 0$  .....

f)  $2x^2 + 3x = 0$  .....

b)  $9x^2 + 6x + 1 = 0$  .....

g)  $2x^2 + 3 = 0$  .....

c)  $x^2 + 4x - 12 = 0$  .....

h)  $x^2 + 4x - 5 = 0$  .....

d)  $x^2 - 5x + 6 = 0$  .....

i)  $3x^2 - 11x + 8 = 0$  .....

e)  $x^2 - 5x = 0$  .....

j)  $5x^2 + 24x + 19 = 0$  .....

### Calcul 6.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

a)  $x^2 - 13x + 42 = 0$  .....

d)  $x^2 - 8x - 33 = 0$  .....

b)  $x^2 + 8x + 15 = 0$  .....

e)  $x^2 - (a + b)x + ab = 0$  .....

c)  $x^2 + 18x + 77 = 0$  .....

f)  $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$  .....

### Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a)  $3x^2 - 14x + 8 = 0$  sachant que  $x = 4$  est racine .....

b)  $7x^2 + 23x + 6 = 0$  sachant que  $x = -3$  est racine .....

c)  $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$  sachant que  $x = -2$  est racine .....

d)  $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$  sachant que  $x = m$  est racine .....

### Calcul 6.4 — Racine évidente.



Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

- a)  $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$  .....
- b)  $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$  .....
- c)  $(x+a)(x+b) = (m+a)(m+b)$  .....
- d)  $(b-c)x^2 + (c-a)mx + (a-b)m^2 = 0$  .....
- e)  $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$  .....
- f)  $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  .....

## Recherche d'équations

### Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.



En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13 .....
- b) -11 et 17 .....
- c)  $2 + \sqrt{3}$  et  $2 - \sqrt{3}$  .....
- d)  $m + \sqrt{m^2 - 3}$  et  $m - \sqrt{m^2 - 3}$  .....
- e)  $m + 3$  et  $\frac{2m-5}{2}$  .....
- f)  $\frac{m+1}{m}$  et  $\frac{m-2}{m}$  .....

### Calcul 6.6 — Avec le discriminant.



Déterminer la valeur à donner à  $m$  pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a)  $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$  .....
- b)  $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$  .....
- c)  $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$  .....

## Factorisations et signe

### Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout  $x$ .

- a)  $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$  .....
- b)  $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$  .....
- c)  $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$  .....
- d)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$  .....
- e)  $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$  .....

### Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de  $x$  pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

- a)  $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$  .....
- b)  $-x^2 + 2x + 15$  .....
- c)  $(x + 1)(3x - 2)$  .....
- d)  $\frac{x - 4}{2x + 1}$  .....

### Réponses mélangées

$2/3$      $m$  donc  $ab/m$      $m$  donc  $-(m + a + b)$      $a = -3$  et  $b = 5$      $-7, -11$   
 $x^2 - 22x + 117 = 0$      $] -\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$      $0$ , donc  $5$      $m = 1$  et  $x = -1$  ou  $m = -1$  et  $x = 1$   
 $[-3, 5]$      $m$  donc  $m(a - b)/(b - c)$      $a = 1/2$  et  $b = 8$      $-3, 11$      $1$  donc  $c(a - b)/(a(b - c))$   
 $a, b$      $] -\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$      $-1/m$      $a + b$  puis  $2ab/(a + b)$ .     $1$  donc  $-5$   
 $6, 7$      $1$  donc  $(a - b)/(b - c)$      $] -\infty, -1/2[ \cup [4, +\infty[$      $2m/(m + 3)$   
 $-2/7$      $a = 1$  et  $b = 3\sqrt{7}$      $m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0$   
 $a = -2$  et  $b = 1$      $2, 3$      $a - b, a + b$      $3, 3$      $a = 2$  et  $b = 3$      $1$  donc  $8/3$   
 $\emptyset$      $m = -3/4$  et  $x = 3/4$      $-3, -5$      $2x^2 - (4m + 1)x + (2m^2 + m - 15) = 0$   
 $-1$  donc  $-19/5$      $x^2 - 4x + 1 = 0$      $-1/3, -1/3$      $x^2 - 2mx + 3 = 0$   
 $0$ , donc  $-3/2$      $x^2 - 6x - 187 = 0$      $2, -6$      $m = -1$  et  $x = -2$ , ou  $m = 7$  et  $x = 2/3$

► Réponses et corrigés page 96