Devoir surveillé

Exercice 1. *Extraits du cahier de calcul*

1. Simplifier les fractions suivantes :

$$\text{a) } A = \frac{32}{40} \qquad \text{b) } B = \frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$$

2. Ecrire sous forme d'une fraction irréductible :

$$C = (2 \times 3 \times 5 \times 7) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)$$

3. Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

$$D = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$$

Exercice 2. *Equations*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $$\frac{x^2 - 3x + 2}{-x^2 + x + 2} > 0$$
2. $|x - 4| = |x - 8|$
3. $|x + 2| < 3$.
4. $|x + 1| = 4 - |x - 3|$.

Exercice 3. *Forme canonique d'un trinôme du second degré*

1. Mettre sous forme canonique les trinômes suivants :

$$P(x) = x^2 + 4x + 4 \qquad Q(x) = x^2 - 6x + 10 \qquad R(x) = 3x^2 - 12x$$

   Représenter la courbe de la fonction Q dans un repère orthonormé.

2. On cherche à déterminer, pour a, $b \in \mathbb{R}$, la plus petite valeur possible de :

$$F(a, b) = \int_0^1 \left(x^3 - ax - b \right)^2 \, \mathrm{dx}$$

   (a) Développer, réduire et ordonner selon les puissances le x l'expression :

$$T(x) = (x^3 - ax - b)^2$$

   (b) Donner une expression de $F(a, b)$ en fonction de a et b.
   (c) Conclure

Problème bonus : minimisation d'une somme de distances sur la droite réelle

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels fixés, et pour tout réel x on pose

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|.$$

Le but est de déterminer le minimum de la fonction f dans quelques cas particuliers.

Cas $n = 2$

Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - a_1| + |x - a_2| \ \geq \ |a_2 - a_1|.$$

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'égalité a lieu.

Cas $n = 3$

Soient $a_1 \leq a_2 \leq a_3$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| \ \geq \ a_3 - a_1.$$

2. Déterminer les valeurs de x qui minimisent $f(x)$.

Cas $n = 4$

Soient $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4| \ \geq \ (a_4 - a_1) + (a_3 - a_2).$$

2. Déterminer l'ensemble des x pour lesquels cette borne est atteinte.