Devoir surveillé

Exercice 1. *Extraits du cahier de calcul*

1. Simplifier les fractions suivantes :

$$\text{a) } A = \frac{32}{40} = \frac{4\times 8}{5\times 8} = \frac{4}{5}$$

$$\text{b) } B = \frac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$$

$$B = \frac{(-1)^{2k+1}\times 2^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{2^{2k}\times 3^{-k+1}}$$

$$B = (-1)^{2k+1}\times 2^{2k+1-2k}\times 3^{2k-1-(-k+1)}$$

$$B = (-1)^{2k+1}\times 2\times 3^{3k-2}$$

2. Ecrire sous forme d'une fraction irréductible :

$$C = (2\times 3\times 5\times 7)\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)$$

$$C = (2\times 3\times 5\times 7)\times\left(\frac{3\times 5\times 7}{2\times 3\times 5\times 7}+\frac{2\times 5\times 7}{2\times 3\times 5\times 7}+\frac{2\times 3\times 7}{2\times 3\times 5\times 7}+\frac{2\times 3\times 5}{2\times 3\times 5\times 7}\right)$$

$$C = 3\times 5\times 7+2\times 5\times 7+2\times 3\times 7+2\times 3\times 5$$

$$C = 105+70+42+30$$

$$C = 247$$

3. Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible :

$$D = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$

$$D = \frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

$$D = \frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n^2+n}{n(n+1)^2}-\frac{n^2+2n+1}{n(n+1)^2}$$

$$D = -\frac{1}{n(n+1)^2}$$

Exercice 2. *Equations*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

1. $$\frac{x^2-3x+2}{-x^2+x+2} > 0$$

   Le trinôme $S(x) = x^2-3x+2$ a pour racines 1 et 2 donc on a :

   $$S(x) = (x-1)(x-2).$$

   Le trinôme $U(x) = -x^2+x+2$ a pour racines -1 et 2 donc on peut écrire :

   $$U(x) = -(x+1)(x-2).$$

   L'inéquation n'a de sens que si $x\notin\{-1;2\}$. Si c'est bien le cas, on peut simplifier le numérateur et le dénominateur par $(x-2)$ et obtenir :

   $$-\frac{x-1}{x+1} > 0$$

   On en déduit (au moyen d'un tableau de signe par exemple) que l'ensemble des solutions est : $]-1,1[$

2. $|x-4| = |x-8|$
On cherche un réel x qui est à égale distance de 4 et de 8 : il y a donc une unique solution qui est 6, au milieu entre les deux nombres.
3. $|x+2| < 3$.
$|x-(-2)| < 3$.
L'ensemble des solutions est donc composé des réels dont la distance à -2 est inférieure strictement à 3 :

$$]-2-3\ ;\ -2+3[=]-5\ ;\ 1[$$

4. $|x+1| = 4 - |x-3|$.
On commence par un tableau de signe des expressions dans les valeurs absolues :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0		$+$		
$x-3$			$-$		0	$+$	

On distingue donc trois cas :
(a) Si $x \in]-\infty, -1]$, on résout :

$$-x-1 = 4+x-3,$$
$$x = -1.$$

Il y a donc une solution dans cet intervalle : -1.
(b) Si $x \in]-1, 3]$, on résout :

$$x+1 = 4+x-3,$$
$$1 = 1.$$

Tous les nombres de l'intervalle $]-1, 3]$ sont donc bien des solutions.
(c) Si $x \in]3, +\infty[$, on résout :

$$x+1 = 4-x+3,$$
$$2x = 6,$$
$$x = 3.$$

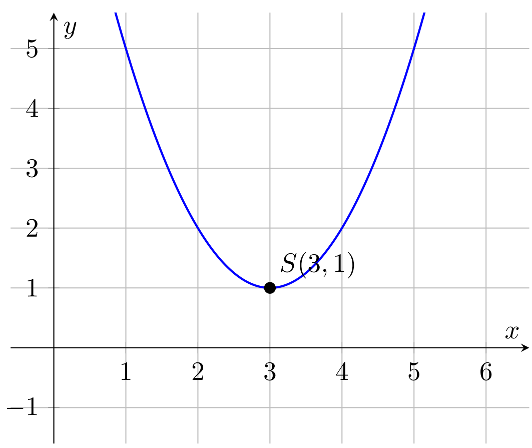
Il n'y a donc pas de solution dans cet intervalle.
Conclusion : l'équation admet pour ensemble de solutions $[-1, 3]$.

Exercice 3. *Forme canonique d'un trinôme du second degré*

1. Mettre sous forme canonique les trinômes suivants :

$$P(x) = x^2 + 4x + 4 \qquad Q(x) = x^2 - 6x + 10 \qquad R(x) = 3x^2 - 12x$$
$$P(x) = (x+2)^2 \qquad Q(x) = (x-3)^2 + 1 \qquad R(x) = 3(x-2)^2 - 12$$

Représenter la courbe de la fonction Q dans un repère orthonormé.



2. On cherche à déterminer, pour a, $b \in \mathbb{R}$, la plus petite valeur possible de :

$$F(a,b) = \int_0^1 \left(x^3 - ax - b\right)^2 \ \mathrm{dx}$$

(a) Développer, réduire et ordonner selon les puissances le x l'expression :

$$\begin{aligned}
T(x) &= (x^3 - ax - b)^2 \\
T(x) &= (x^3 - ax)^2 - 2b(x^3 - ax) + b^2 \\
T(x) &= x^6 - 2ax^4 - 2bx^3 + a^2x^2 + 2abx + b^2
\end{aligned}$$

(b) Donner une expression de $F(a,b)$ en fonction de a et b.

$$\begin{aligned}
F(a,b) &= \left[\frac{x^7}{7} - 2a\frac{x^5}{5} - 2b\frac{x^4}{4} + a^2\frac{x^3}{3} + abx^2 + b^2x\right]_{x=0}^{x=1} \\
F(a,b) &= \frac{1}{7} - \frac{2a}{5} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{3} + ab + b^2
\end{aligned}$$

(c) Conclure

$$\begin{aligned}
F(a,b) &= b^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)b + \frac{1}{7} - \frac{2a}{5} + \frac{a^2}{3} \\
F(a,b) &= \left(b + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{7} - \frac{2a}{5} + \frac{a^2}{3} \\
F(a,b) &= \left(b + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{12}a^2 - \frac{3}{20}a + \frac{9}{112} \\
F(a,b) &= \left(b + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{12}\left(a^2 - \frac{9}{5}a\right) + \frac{9}{112} \\
F(a,b) &= \left(b + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{12}\left[\left(a - \frac{9}{10}\right)^2 - \left(\frac{9}{10}\right)^2\right] + \frac{9}{112} \\
F(a,b) &= \left(b + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{12}\left(a - \frac{9}{10}\right)^2 - \frac{27}{400} + \frac{9}{112} \\
F(a,b) &= \left(b + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{12}\left(a - \frac{9}{10}\right)^2 + \frac{36}{2800} \\
F(a,b) &= \left(b + \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + \frac{1}{12}\left(a - \frac{9}{10}\right)^2 + \frac{9}{700}
\end{aligned}$$

Ainsi, on comprend que la plus petite valeur possible de $F(a,b)$ est $\frac{9}{700}$.

Problème bonus : minimisation d'une somme de distances sur la droite réelle

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels fixés, et pour tout réel x on pose

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|.$$

Le but est de déterminer le minimum de la fonction f dans quelques cas particuliers.

Cas $n = 2$

Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|x - a_1| + |x - a_2| \;\geq\; |a_2 - a_1|.$$
On remarque :
$$a_2 - a_1 = (a_2 - x) + (x - a_1)$$
On en déduit grâce à l'inégalité triangulaire :
$$|a_2 - a_1| \leq |a_2 - x| + |x - a_1|$$
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'égalité a lieu.
L'égalité a lieu si et seulement si $a_2 - x$ et $x - a_1$ sont du même signe, c'est à dire si x est dans l'intervalle fermé entre a_1 et a_2.

Cas $n = 3$

Soient $a_1 \leq a_2 \leq a_3$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| \;\geq\; a_3 - a_1.$$
On applique les inégalités obtenues ci-dessus avec deux des trois points a_1, a_2 et a_3 et on en déduit :
$$|x - a_1| + |x - a_2| \geq a_2 - a_1$$
$$|x - a_1| + |x - a_3| \geq a_3 - a_1$$
$$|x - a_2| + |x - a_3| \geq a_3 - a_2$$
On ajoute les trois inégalités ci-dessus pour obtenir :
$$2\left(|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3|\right) \geq 2a_3 - 2a_1$$
$$|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| \geq a_3 - a_1$$
2. Déterminer les valeurs de x qui minimisent $f(x)$.
Les trois inégalités ci-dessus sont des égalités si et seulement si x est dans trois intervalles à la fois : $[a_1, a_2]$, $[a_1, a_3]$ et $[a_2, a_3]$. Il y a une unique valeur de x qui rend ceci possible : il s'agit de $x = a_2$ qui est l'unique point en lequel est atteint le minimum de $f(x)$ qui vaut $a_3 - a_1$.

Cas $n = 4$

Soient $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4| \;\geq\; (a_4 - a_1) + (a_3 - a_2).$$
On applique l'inégalité du cas $n = 2$ successivement avec les deux couples de points a_1 avec a_4 puis a_2 avec a_3. On obtient les deux inégalités :
$$|x - a_1| + |x - a_4| \geq a_4 - a_1$$
$$|x - a_2| + |x - a_3| \geq a_3 - a_2$$
En ajoutant ces deux inégalités, on obtient :
$$f(x) \;\geq\; (a_4 - a_1) + (a_3 - a_2).$$
2. Déterminer l'ensemble des x pour lesquels cette borne est atteinte.
Cette borne est atteinte si et seulement si x est dans deux intervalles à la fois : $[a_1, a_4]$ et $[a_2, a_3]$, ce qui équivaut à $x \in [a_2, a_3]$.