
Rappels et compléments d'analyse.

Exercice 1. *Équations et inéquations du second degré*

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x + 2)^2 = -1 \quad (1)$$

$$(x + 2)^2 = 2 \quad (2)$$

$$(x + 1)^2 = -2x + 6 \quad (3)$$

$$(2x - 1)^2 = -(3x - 2)^2 \quad (4)$$

Résoudre également les inéquations suivantes :

$$(x + 2)^2 \geq 9 \quad (1)$$

$$x^2 - 5x + 3 > 0 \quad (2)$$

$$-3x^2 + 2x - 2 > 0 \quad (3)$$

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 3} > 1 \quad (4)$$

Exercice 2. *Équations, inéquations qui se ramènent à des problèmes du second degré*

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$|x^2 - 1| = |x + 1| \quad (5)$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = x - 2 \quad (6)$$

2. Résoudre l'inéquation bicarrée suivante :

$$-3x^4 + 2x^2 - \frac{1}{4} < 0.$$

3. Résoudre l'équation suivante à l'aide du changement de variable $y = x + \frac{1}{x}$:

$$3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Exercice 3. *Une échelle contre un mur*

On dispose une échelle de 4 mètres de long contre un mur, de sorte que l'échelle s'appuie également sur une caisse cubique de 1 mètre de coté posée contre le mur. Le but de ce problème est de déterminer à quelle hauteur l'échelle touche le mur. On note x la distance en mètres entre le haut de la caisse et le haut de l'échelle, y la distance en mètres entre le bas de l'échelle et la caisse.

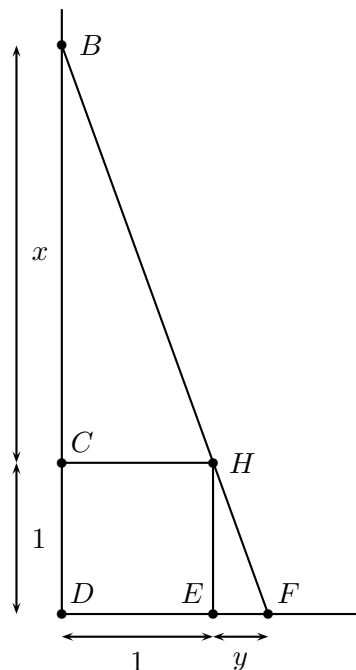
1. Montrer que $y = \frac{1}{x}$.

2. Prouver que x est solution de l'équation :

$$x^2 + 2x - 14 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

3. A l'aide du changement de variable $u = x + \frac{1}{x}$, déterminer les solutions de l'équation.

4. Résoudre le problème posé au départ.



Exercice 4. Distance à une parabole

Dans un repère orthonormé, on appelle $\mathcal{P}$ la parabole d'équation : $y = x^2$.

Soit A le point de coordonnées $(6; 3)$. Le but de cet exercice est de déterminer s'il existe un point M appartenant à $\mathcal{P}$ tel que la distance AM soit minimale. On admettra que AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimale.

1. Soit un point M d'abscisse x appartenant à $\mathcal{P}$. Démontrer que :

$$AM^2 = x^4 - 5x^2 - 12x + 45.$$

2. On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe AM^2 , c'est à dire :

$$f(x) = x^4 - 5x^2 - 12x + 45.$$

(a) Préciser sur quel intervalle f est dérivable.

(b) Calculer $f'(x)$.

(c) Montrer que 2 est une racine de $f'(x)$ (c'est à dire une solution de $f'(x) = 0$).

(d) Déterminer les réels a , b et c tels que :

$$f'(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c).$$

3. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Démontrer alors qu'il existe un seul point M_0 de $\mathcal{P}$, d'abscisse 2, telle que AM est minimale.

(b) Donner les coordonnées de M_0 .

5. (a) Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_2$ à $\mathcal{P}$ au point M_0 .

(b) On appelle N le point de $\mathcal{T}_2$ d'abscisse 0. Quelles sont les coordonnées de N ?

(c) Montrer que $AM_0^2 = 17$, que $M_0N^2 = 68$ et que $AN^2 = 85$.

(d) Que peut-on en déduire ?

Exercice 5. Quelques problèmes d'optimisation

1. Un industriel souhaite réaliser une casserole de volume V . On note x le rayon de la casserole. Déterminer en fonction de x la hauteur $h(x)$ de la casserole et l'aire $A(x)$ de la surface de la casserole constituée d'un disque (le fond) et d'une portion de cylindre (le bord).

Étudier alors la fonction A sur $\mathbb{R}_+^*$, et déterminer la valeur x_{min} en laquelle est atteinte le minimum de A .

Vérifier enfin que $h(x_{min}) = x_{min}$ (par le calcul, ensuite vous pourrez vérifier chez vous qu'effectivement, les casseroles communément utilisées tendent à vérifier cette règle).

2. On considère une sphère de rayon R . Déterminer volume minimal d'un cône de révolution circonscrit à la sphère.

Exercice 6. Composée de fonctions

Soit P défini par $P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$.

1. (a) Montrer que 1 est racine de P , c'est à dire solution de l'équation $P(x) = 0$.
- (b) Déterminer trois réels a , b et c tels que

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

- (c) En déduire l'ensemble des racines de P (i.e. l'ensemble des solutions de $P(x) = 0$).
2. (a) Calculer la dérivée P' de P et étudier son signe.
- (b) Dresser le tableau de variation de P après avoir étudié ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
- (c) En déduire le tableau de signe de $P(x)$ en fonction de x .
3. On pose $f = \frac{1}{P}$.
 - (a) Déterminer le domaine de définition de f .
 - (b) Déterminer les variations de f sur son ensemble de définition après avoir rappelé celles de $x \mapsto \frac{1}{x}$.
4. On pose $g = P^2$.
 - (a) Donner les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
 - (b) Déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}$ après avoir rappelé celles de $x \mapsto x^2$.

Exercice 7. Equations paramétriques

Discuter, pour chacune des équations suivantes, l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}$ selon la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 2mx + 6 - m = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 2mx + 3m - 1 = 0 \tag{2}$$

Exercice 8. Fonctions paires et impaires

Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$$

$$f_2(x) = \frac{x^5 - x}{x^2 - 1}$$

$$f_3(x) = \frac{x^5 - x}{x^3 - 1}$$

$$f_4(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f_5(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Exercice 9. Symétries

1. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie du graphe de la fonction

$$f : x \mapsto x^2 - 3x + 2.$$

2. Montrer que le point I de coordonnées $(1, 2)$ est un centre de symétrie du graphe de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x + 1}{x - 1}.$$

3. Montrer que le point I de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie du graphe de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Exercice 10. *Calculs a.q.t.*

Déterminer l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{1+\cos(x)^2}$$

$$f_2(x) = \frac{\ln(x)}{1 + e^{x^2}}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{1+e^{x^4}}\right)}$$

Limites

Exercice 11. *Calcul de limites*

Étudier les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \text{ en } 1 & 2. \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \text{ en } 1 \\ 3. \frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8} \text{ en } +\infty & 4. \sqrt{x^2+2x}-x \text{ en } +\infty \end{array}$$

Exercice 12. *Croissance comparée*

1. Etudier les variations de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \ln(x) - x$
2. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$(i) \ln(x) \leq x$$

$$(ii) 0 \leq \frac{\ln(x)}{2x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3. En déduire que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 13. *Calcul de limites*

Étudier les limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}} \text{ en } +\infty & 2. \frac{\sqrt{1+x} - (1 + \frac{x}{2})}{x^2} \text{ en } 0 \\ 3. \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} \text{ en } +\infty. & \end{array}$$

Exercice 14. *Avec la partie entière*

Étudier les limites à droite en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad g : x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad h : x \mapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Inégalités

Exercice 15. Avec études de fonctions

Dans cet exercice, on demande de prouver des inégalités, par exemple à l'aide d'études de fonctions. Voici ces inégalités :

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x \leq x - 1$$

2.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin x \leq x$$

3.

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$$

Exercice 16. Inégalité entre moyennes

Prouver que la proposition suivante est vraie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Exercice 17. Avec des racines carrées

1. Si x et y sont deux réels positifs tels que $x \geq y$, prouver que :

(a)

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

(b)

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

2. Dédurre de la question précédente que pour x et y deux réels, on a :

(a)

$$\sqrt{|x+y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$$

(b)

$$\left| \sqrt{|x|} - \sqrt{|y|} \right| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$$

Exercice 18. Variante autour de l'inégalité triangulaire

Prouver que l'on a :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^2, |x + 2y + z| - |y| \leq |x + y| + |z|.$$

Prouver que l'on a aussi :

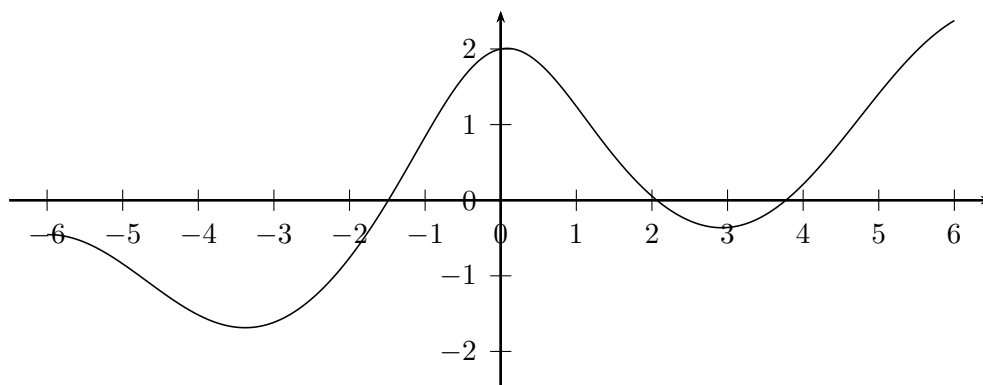
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|.$$

Indication : On pourra résoudre dans un premier temps le système d'inconnues x et y , $x + y = a$ et $x - y = b$.

Fonctions associées

Exercice 19. Fonctions associées

On a représenté ci-dessous le graphe d'une fonction f .



Pour chacune des fonctions suivantes dont les graphes sont obtenus à partir de celui de f à l'aide d'une translation, d'une symétrie ou d'une dilatation, préciser son expression.

