Corrigé du devoir à la maison

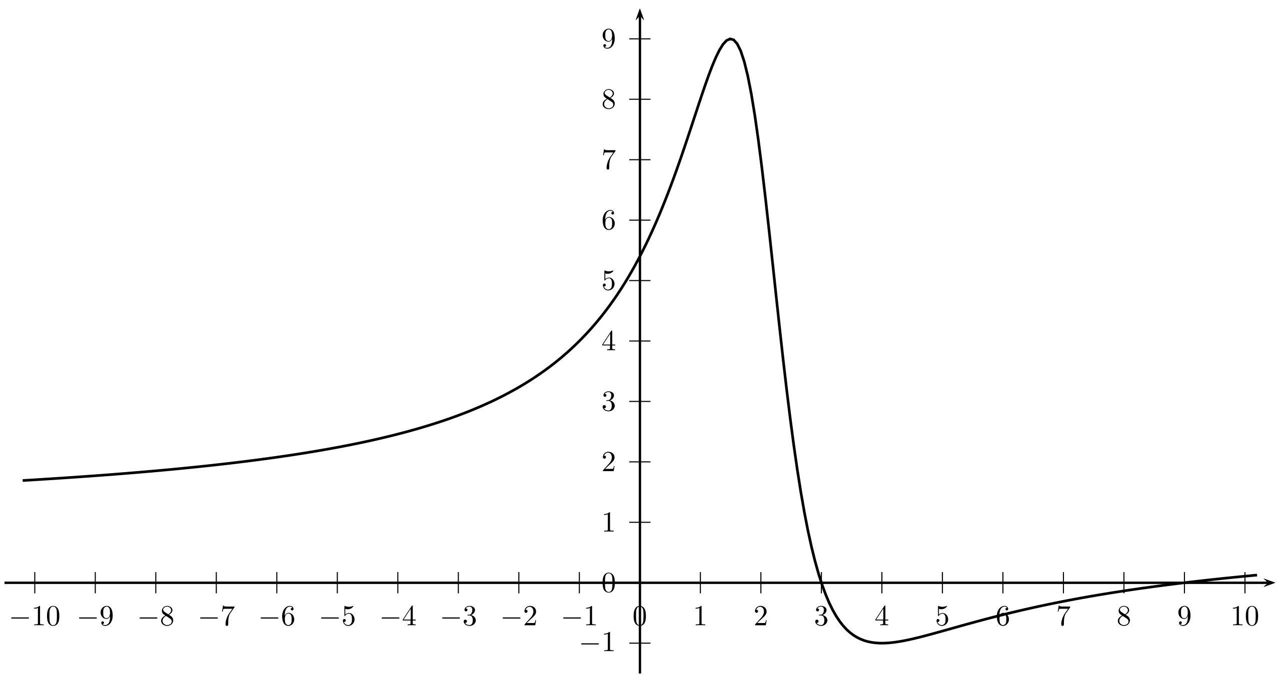
Exercice 1. *Etudes de fonctions*

1. Soit f la fonction définie par :
$$f(x) = \frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}$$
Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f, les limites de f aux bords de D_f, réaliser un tableau de variations.
En calculant le discriminant du trinôme $T(x) = x^2 - 4x + 5$, $\Delta = -4 < 0$, on constate que $T(x)$ ne s'annule pas donc $D_f = \mathbb{R}$.
f est dérivable sur D_f puisque c'est un quotient de polynômes, et l'on a :
$$f'(x) = \frac{4(2x^2 - 11x + 12)}{(x^2 - 4x + 5)^2}$$
On peut aisément calculer le discriminant de $U(x) = 2x^2 - 11x + 12$, $\Delta = 25$, puis en déduire les deux racines $x_1 = \frac{3}{2}$ et $x_2 = 4$ afin de dresser le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$U(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f sont les mêmes que celles de $\frac{x^2}{x^2} = 1$ donc f a pour limite 1 en les deux bords de son domaine de définition. Comme la dérivée $f'(x)$ est du même signe que $U(x)$, on peut enfin réaliser un tableau de variations puis tracer la courbe.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
$f(x)$	1 ↗	9 ↘	-1 ↗	1



2. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

— On commence par étudier la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g : x \mapsto \ln(1+x) - x$$

On remarque que g est dérivable et que si $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}.$$

Cette dérivée est de signe négatif sur $\mathbb{R}_+$ donc g est décroissante. Ainsi, on a si $x \in \mathbb{R}_+$: $g(x) \leq g(0)$ i.e. $\ln(1+x) - x \leq 0$.
On a démontré la deuxième inégalité $\ln(1+x) \leq x$.

— On étudie alors la fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$h : x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

On remarque que g est dérivable et que si $x \in \mathbb{R}_+$:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x}.$$

Cette dérivée est de signe positif sur $\mathbb{R}_+$ donc h est croissante. Ainsi, on a si $x \in \mathbb{R}_+$: $h(0) \leq h(x)$ i.e. $0 \leq \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.
On a démontré la première inégalité $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

Exercice 2. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, on pose :

$$f_m(x) = x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2}.$$

1. Étude de f_6 :
   (a) Mettre $f_6(x)$ sous forme canonique, déterminer ainsi les coordonnées (α, β) du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_6}$.

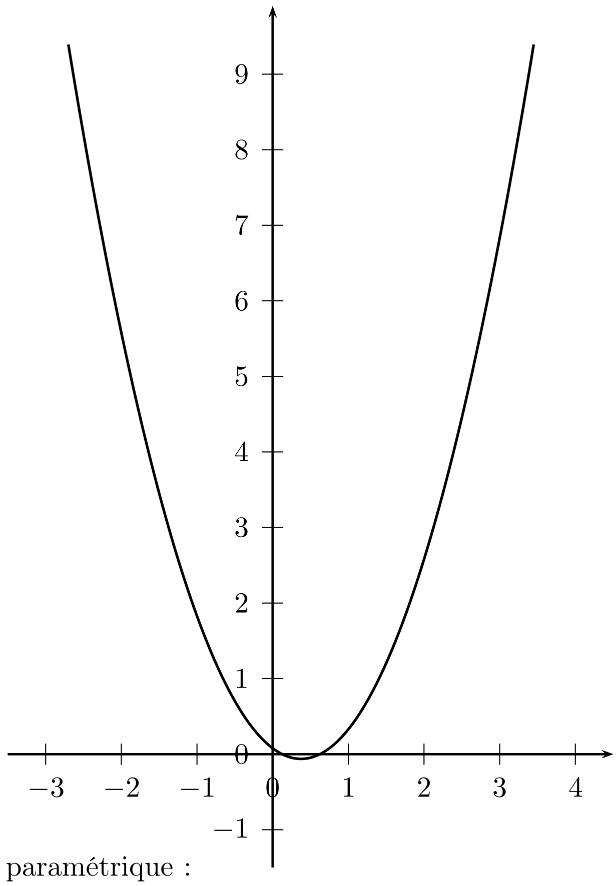
$$f_6(x) = x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{64}$$

$$f_6(x) = \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{9}{64} + \frac{5}{64}$$

$$f_6(x) = \left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

   On en déduit les coordonnées $\left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{16}\right)$ du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_6}$.

   (b) Voici la courbe $\mathcal{C}_{f_6}$ tracée dans un repère orthonormé :



2. Résolution de l'équation paramétrique :

$$(E)\ \ x^2 - \frac{m}{m+2}x + \frac{m+4}{2(m+2)^2} = 0$$

(a) Pour $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, calculons le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m :

$$\Delta(m) = \frac{m^2}{(m+2)^2} - 4\frac{m+4}{2(m+2)^2}$$

$$\Delta(m) = \frac{m^2 - 2m - 8}{(m+2)^2}$$

Le trinôme $\phi(m) = m^2 - 2m - 8$ a pour racines $m_1 = -2$ et $m_2 = 4$, on en déduit le tableau de signe de $\Delta(m)$ en fonction de m :

m	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$\Delta(m)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Du tableau de signe ci-dessus, on déduit que :
— Si $m \in]-2, 4[$, $\Delta(m) < 0$ donc l'équation n'a pas de solutions réelles.
— Si $m \in \mathbb{R} \setminus [-2, 4]$, le trinôme f_m a deux racines :

$$x_1(m) = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+2} - \sqrt{\Delta(m)}\right) \text{ et } x_2(m) = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+2} + \sqrt{\Delta(m)}\right)$$

— Si $m = 4$, il y a une unique racine $x = \frac{1}{3}$.

Exercice 3. *Majoration d'une famille de fonctions*

Soit $r \in \mathbb{Q}$, on pose pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$:

$$f_r(x) = (1+x)^r - 1 - rx$$

Le but de ce problème est de montrer que pour $r \in \left\{-2, -1, \frac{1}{2}, 2\right\}$, il existe une constante A_r telle que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \ , \ \ |f_r(x)| \leq A_r x^2$$

et de trouver la meilleure constante A_r possible, qui sera notée A'_r

1. On suppose que : $r = 2$.
   Calculons $f_2(x) = 1 + 2x + x^2 - 1 - 2x$, on en déduit que $f_2(x) = x^2$
   Ainsi, l'inégalité $|f_2(x)| \leq A_2 x^2$ équivaut à $0 \leq (A_2 - 1)x^2$. Cette inégalité est vérifiée pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ si et seulement si $A_2 - 1 \geq 0$, donc on a $A'_2 = 1$.
2. On suppose que : $r = -1$.
   (a) Calculons $f_{-1}(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x$.
   (b) On souhaite montrer que :$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq \frac{1}{1+x} - (1-x) \leq 2x^2$.
   Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, on remarque que $(1+x) \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ est un nombre strictement positif. Ainsi, la double inégalité équivaut à : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq 1 - (1+x)(1-x) \leq (1+x)2x^2$.

   $$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \ 0 \leq x^2 \leq (1+x)2x^2$$

   Pour $x = 0$, les deux inégalités sont des égalités, donc sont vérifiées. Pour $x \neq 0$, on remarque que $x^2 > 0$ donc on peut tout diviser par x^2 et ce que l'on souhaite prouver est équivalent à :

   $$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \ 0 \leq 1 \leq 2(1+x)$$

   Or si $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $1 + x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ donc $2(1+x) \in [1; 3]$ et les inégalités ci-dessus sont donc vraies.
   (c) On voit en reprenant le raisonnement précédent que A_{-1} doit vérifier :

   $$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \ 0 \leq 1 \leq A_{-1}(1+x)$$

   Pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $1 \leq \frac{1}{2}A_{-1}$ d'où $A_{-1} \geq 2$. Comme on a vu à la question précédente que $A_{-1} = 2$ convient, on en déduit que c'est la meilleure constante possible d'où $A'_{-1} = 2$.
3. On suppose que : $r = -2$.
   (a) Calculons $f_{-2}(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - 1 + 2x$.
   (b) On souhaite montrer que :$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, $0 \leq \dfrac{1}{(1+x)^2} - (1-2x) \leq 8x^2$.
   Soit donc $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, puisque $(1+x)^2 > 0$, cette double inégalité équivaut à :

   $$0 \leq 1 - (1-2x)(1+x)^2 \leq 8x^2(1+x)^2$$

   $$0 \leq 1 - (1-2x)(1+2x+x^2) \leq 8x^2(1+2x+x^2)$$

   $$0 \leq 1 - (1 + 2x + x^2 - 2x - 4x^2 - 2x^3) \leq 8x^2(1+2x+x^2)$$

   $$0 \leq 3x^2 + 2x^3 \leq 8x^2(1+2x+x^2)$$

Pour $x = 0$, les deux inégalités sont des égalités et sont vérifiées, sinon on peut diviser par x^2 et cette double inégalité équivaut à :

$$0 \leq 3 + 2x \leq 8(1 + 2x + x^2)$$

Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, on a $3 + 2x \in [2; 4]$ donc l'inégalité de gauche est évidente et il ne nous reste plus qu'à analyser celle de droite qui équivaut à :

$$0 \leq 8x^2 + 14x + 5$$

On calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = 36$ donc le trinôme admet deux racines qui sont $x_1 = -\frac{5}{4}$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$. On sait qu'un tel trinôme est strictement négatif si $x \in \left]-\frac{5}{4}; -\frac{1}{2}\right[$, positif ailleurs donc on a démontré l'inégalité souhaitée pour $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

(c) On voit en reprenant le raisonnement précédent que A_{-2} doit vérifier :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], 3 + 2x \leq A_{-2}(1 + 2x + x^2)$$

Pour $x = -\frac{1}{2}$, on obtient $2 \leq A_{-2}\frac{1}{4}$, i.e. $A_{-2} \geq 8$. On conclut donc que $A'_{-2} = 8$.

4. On suppose que : $r = \dfrac{1}{2}$.

(a) Calculons $f_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$.

(b) On souhaite montrer que :$\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$, $0 \leq 1 + \dfrac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq \dfrac{x^2}{2}$.

L'inégalité de gauche est équivalente à :

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, les deux membres de cette inégalité sont positifs, donc il est équivalent de comparer leurs carrés :

$$1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{4}.$$

Cette dernière inégalité étant évidente, il ne reste plus qu'à traiter l'inégalité de droite, équivalente à :

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq \sqrt{1+x}$$

Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, il n'est pas difficile de voir que les deux membres de l'inégalité sont positifs, et cette inégalité est donc équivalente à :

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{x}{2}\right) x^2 + \frac{x^4}{4} \leq 1 + x$$

$$1 + x - \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} \leq 1 + x$$

$$0 \leq \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$$

Enfin, on constate que l'inégalité est vérifiée pour $x = 0$, et l'on multiplie tout par $\frac{4}{x^2}$ sinon :

$$0 \leq 3 + 2x - x^2$$

$$0 \leq (x + 1)(-x + 3)$$

Et cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $x \in [-1; 3]$.

(c) Revenons à l'inégalité de départ, pour que $A_{\frac{1}{2}}$ soit une constante valable, il faut avoir pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$:

$$1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} \leq A_{\frac{1}{2}} x^2$$

$$\left(1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x}\right)\left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right) \leq A_{\frac{1}{2}} x^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - 1 - x \leq A_{\frac{1}{2}} x^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right)$$

$$\frac{x^2}{4} \leq A_{\frac{1}{2}} x^2 \left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right)$$

Cette inégalité est toujours vérifiée pour $x = 0$, sinon on doit avoir :

$$\frac{1}{4\left(1 + \frac{x}{2} + \sqrt{1+x}\right)} \leq A_{\frac{1}{2}}$$

Le dénominateur est une fonction croissante de x, donc l'expression de gauche est décroissante et atteint son maximum pour $x = -\frac{1}{2}$. Ainsi, la validité de l'inégalité pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ équivaut à ce qu'elle soit vérifiée en $x = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{4\left(1 - \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \leq A_{\frac{1}{2}} \iff 3 - 2\sqrt{2} \leq A_{\frac{1}{2}}$$

En particulier, $\frac{1}{2}$ n'est pas la meilleure constante.

(d) On vient de déterminer $A'_{\frac{1}{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$.