Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Tangentes*

1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f : x \mapsto \frac{-x^2+2x-1}{x},$$
on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan.

(a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule qu'en 0, et l'on a si $x \in \mathbb{R}^*$:
$$f'(x) = \frac{(-2x+2)x-(-x^2+2x-1)}{x^2}$$
$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{x^2}$$

(b) La tangente à $\mathcal{C}_f$ est horizontale en les points où la dérivée s'annule, c'est à dire pour les $x \in \mathbb{R}^*$ tels que :
$$-x^2+1=0$$
On a deux telles valeurs : $x=-1$ ou $x=1$.

(c) Existe t-il des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente admet un coefficient directeur inférieur ou égal à -2 ?
Cette question nous amène à résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\begin{aligned} & \frac{-x^2+1}{x^2} \leq -2 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-x^2+1}{x^2}+2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-x^2+1+2x^2}{x^2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{-x^2+1+2x^2}{x^2} \leq 0 \end{aligned}$$
L'inéquation n'a pas de solution x dans $\mathbb{R}^*$, donc il n'existe aucun point où la tangente à $\mathcal{C}_f$ admet un coefficient directeur inférieur ou égal à -2.

(d) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=-\frac{2}{3}x-5$.
La tangente est parallèle à cette droite si et seulement si sa pente vaut $-\frac{2}{3}$, on est donc amené à résoudre :
$$\begin{aligned} & \frac{-x^2+1}{x^2} = -\frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow\ & -x^2+1 = -\frac{2}{3}x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 3 \end{aligned}$$
Il y a donc deux telles abscisses : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

2. On note f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1;$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + 4x - 3.$$

On souhaite déterminer s'il existe une ou plusieurs tangentes communes à ces deux courbes.

(a) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

$$y = 2ax + a^2 + 1 - 2a^2$$
$$y = 2ax - a^2 + 1$$

(b) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_g$.

$$y = g'(b)x + g(b) - bg'(b)$$

$$y = (-2b + 4)x - b^2 + 4b - 3 + 2b^2 - 4b$$
$$y = (-2b + 4)x - 3 + b^2$$

(c) Conclure.

Les deux droites précédentes sont confondues si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} 2a & = & -2b + 4 \\ -a^2 + 1 & = & -3 + b^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & = & -b + 2 \\ -(-b + 2)^2 + 1 & = & -3 + b^2 \end{array} \right.$$

La deuxième équation donne après réduction $-b^2 + 4b = 0$ i.e. $b(-b + 4) = 0$.
On a donc deux tangentes à la courbe $\mathcal{C}_g$, en les points d'abscisses $b = 0$ et $b = 4$, qui sont aussi des tangentes à $\mathcal{C}_f$. Il s'agit des droites d'équations :

$$y = 4x - 3 \text{ et } y = -4x + 13$$

Exercice 2. *Equations variées*

1.

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

On pose $V(X) = X^2 - 8X - 9$. Ce trinôme a pour racines -1 et 9.
Ainsi, les solutions de l'équation sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = -1$ ou $x^2 = 9$. On en déduit qu'il y a exactement deux solutions à l'équation : -3 et 3.

2.

$$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$$

Cette dernière équation n'a pas pour solution 0, et pour $x \neq 0$, on peut tout diviser par x^2 afin d'obtenir :

$$2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

En posant $u = x + \frac{1}{x}$, on a $u^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ donc $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$. Ainsi, x est solution de l'équation si et seulement si u vérifie :

$$2(u^2 - 2) - 9u + 14 = 0$$

$$2u^2 - 9u + 10 = 0$$

Les deux solutions de cette dernière équation sont $u_1 = 2$ et $u_2 = \frac{5}{2}$.
Il nous reste, dans chacun des deux cas, à résoudre l'équation $x + \frac{1}{x} = u$, qui équivaut à :

$$x - u + \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{x^2 - ux + 1}{x} = 0$$

$$x^2 - ux + 1 = 0$$

Pour $u = 2$, le discriminant Δ est nul et l'unique solution est $x = 1$.
Pour $u = \frac{5}{2}$, on a deux solutions $x = 2$ ou $x = \frac{1}{2}$.
L'équation admet un ensemble de 3 solutions : $\{\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ 2\}$.

Exercice 3. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_m(x) = x^2 - (m+1)x + m.$$

1. Étude de f_2 :
   (a) Mettre $f_2(x)$ sous forme canonique, déterminer ainsi les coordonnées (α, β) du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_2}$.

   $$f_2(x) = x^2 - 3x + 2$$

   Or si l'on calcule :

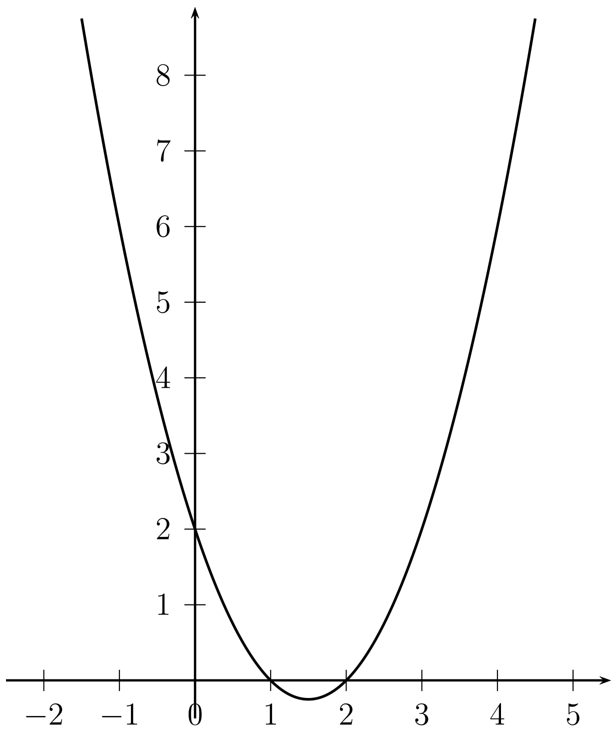
   $$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}.$$

   On en déduit :

   $$f_2(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

   Le sommet de la parabole est donc le point $(\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{1}{4})$.

(b) Voici la courbe $\mathcal{C}_{f_2}$ tracée dans un repère orthonormé :



2. Résolution de l'équation paramétrique :

$$(E) \;\; x^2 - (m+1)x + m = 0$$

(a) Pour $m \in \mathbb{R}$, calculer le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m, et dresser le tableau de signe de ce discriminant en fonction de m.

$$\Delta(m) = (m+1)^2 - 4m$$
$$\Delta(m) = m^2 + 2m + 1 - 4m$$
$$\Delta(m) = m^2 - 2m + 1$$
$$\Delta(m) = (m-1)^2$$

Ce discriminant est donc positif pour toute valeur de m, nul si et seulement si $m = 1$.

m	$-\infty$		1		$+\infty$
$\Delta(m)$		$+$	0	$+$	

(b) Discuter, selon la valeur du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation (E) ci-dessus.
L'équation admet donc une unique solution si $m = 1$, et admet deux solutions sinon.