Devoir surveillé

Exercice 1. *Tangentes*

1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{-x^2 + 2x - 1}{x},$$

on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan.

(a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et que l'on a si $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$$

(b) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente est horizontale.

(c) Existe t-il des points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente a un coefficient directeur égal à -2 ?

(d) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

2. On note f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1;$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + 4x - 3.$$

On souhaite déterminer s'il existe une ou plusieurs tangentes communes à ces deux courbes.

(a) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

(b) Donner l'équation de la tangente en le point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$ à la courbe $\mathcal{C}_g$.

(c) Conclure.

Exercice 2. *Equations variées*

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1)\ \ x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

$$2)\ \ 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2 = 0$$

Exercice 3. *Second degré avec un paramètre*

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_m(x) = x^2 - (m+1)x + m.$$

1. Étude de f_2 :

(a) Mettre $f_2(x)$ sous forme canonique, déterminer ainsi les coordonnées (α, β) du sommet de la parabole $\mathcal{C}_{f_2}$.

(b) Représenter $\mathcal{C}_{f_2}$ dans un repère orthonormé.

2. Résolution de l'équation paramétrique :

$$(E)\ \ x^2 - (m+1)x + m = 0$$

(a) Pour $m \in \mathbb{R}$, calculer le discriminant $\Delta(m)$ du trinôme f_m, et dresser le tableau de signe de ce discriminant en fonction de m.

(b) Discuter, selon la valeur du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation (E) ci-dessus.