Fonctions usuelles

Exercice 1. *Bijection*

Soit $f : [-1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Montrer que f réalise une bijection sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser ; trouver la fonction réciproque de f.

Exercice 2. *Positivité*

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x-2)e^x + (x+2)$. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \geq 0$.

Exercice 3. *Equations et inéquations*

1. Résoudre l'inéquation $\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1$.
2. Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x^x}$.
3. Résoudre l'équation $5\text{ch}x - 4\text{sh}x = 3$.
4. Résoudre l'équation $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$.
5. Résoudre l'équation $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

Exercice 4. *Comparaison de deux composées*

Démontrer que l'on a pour tout réel x :

$$\sin(\cos(x)) < \cos(\sin(x))$$

Indications : Restreindre l'intervalle d'étude.
Pour $X \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, démontrer et utiliser l'inégalité $\sin X < X$.

Exercice 5. *Variations et limites d'une fonction*

Faire l'étude complète (tableau de variations, limites éventuelles en $+\infty$ et $-\infty$) et tracer la courbe de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^{2x} - 7e^x + 5x + 1$$

Exercice 6. *Minoration de $x^y + y^x$ sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$.*

1. Trouver le minimum de x^x pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, que l'on notera m.
2. Soient x et y deux réels tels que $0 < y \leq x < 1$. Démontrer que :
$$x^y + y^x \geq m^{\frac{y}{x}} + m\frac{y}{x}.$$
3. En déduire que $\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ x^y + y^x > 1$.
4. Montrer que 1 est le plus grand réel A tel que :
$$\forall (x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2,\ x^y + y^x > A.$$

Exercice 7. *Simplifier*

Simplifier les expressions suivantes, où l'on a noté $\log_x(y) = \dfrac{\ln y}{\ln x}$:

$$\mathbf{1}.\ x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}; \qquad \mathbf{2}.\ \log_x\left(\log_x x^{x^y}\right)$$

Exercice 8. *Avec des modulos*

Déterminer l'ensemble des solutions $\theta \in \mathbb{R}$ de chacune des équations suivantes :

$$3\theta + \pi \equiv 2\theta - \frac{\pi}{3} \left[\frac{\pi}{2}\right] \tag{1}$$

$$3\theta + \pi \equiv -\left(2\theta - \frac{\pi}{3}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right] \tag{2}$$

$$2(7\theta + \pi) \equiv 5\theta - \pi[4\pi] \tag{3}$$

Exercice 9. *Liens entre les différentes fonctions trigonométriques*

1. Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et que $\sin x = -\frac{3}{5}$, que vaut $\cos x$?
2. Si $x \in [0, \pi]$ et que $\cos x = -\frac{1}{3}$, que vaut $\tan x$?
3. Si $x \in \mathbb{R}$ et que $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, exprimer $\tan^2 x$ en fonction de $\cos x$, puis en fonction de $\sin x$. Exprimer également dans ce cas $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\tan x$.

Exercice 10. *Équations trigonométriques basiques*

Soit $a \in [0, \pi]$, combien y a-t-il de points M_θ associés au réel θ tels que $\cos\theta = \cos a$?
Combien y a-t-il de points M_θ associés au réel θ tels que $\sin\theta = \sin a$?
Combien y a-t-il de points M_θ associés au réel θ tels que $\tan\theta = \tan a$?
Résoudre les équations suivantes :

$$\sin x = \sqrt{3}\cos x \tag{1}$$

$$\sin x = \cos(2x) \tag{2}$$

$$\sin x = 2\sin x \cos x \tag{3}$$

Exercice 11. *Équations trigonométriques simples*

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\sqrt{3} \tag{1}$$

$$\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tag{2}$$

$$\cos(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tag{3}$$

$$\cos x(2\cos x + 1) = 1 \tag{4}$$

$$2\cos^2 x - 3\sin x - 3 = 0 \tag{5}$$

Exercice 12. *Formules de duplication*

1. Pour $a \in [-\pi, \pi]$, exprimer $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$ en fonction de $\cos a$.

   En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \not\equiv \pi[2\pi]$. On note $t = \tan \frac{a}{2}$.
   Rappeler l'expression de $\cos a$ et $\sin a$ en fonction de t.
   Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, en déduire l'expression de $\tan a$ en fonction de t.
   Donner enfin la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{8}$
3. Déterminer l'ensemble des valeurs $x \in [-\pi, \pi]$ telles que :
$$2\sin x = \sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)}$$

Exercice 13. *Linéarisation*

Linéariser les expressions suivantes, c'est à dire transformer les produits de sinus ou cosinus en sommes :

1. $A(x) = \sin^2 x \cos^2 x$
2. $B(x) = 8\sin^3 x$
3. $C(x) = \cos^5 x$
4. $D(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

Exercice 14. *Un exercice d'oral de l'X*

Calculer $X = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$
Précision : Si $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est le réel y de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan y = x$.
Indication : A l'aide de formules trigonométriques, commencer par calculer $\tan X$.

Exercice 15. *Simplifier*

1. Simplifier les expressions suivantes :
$$\tan(\arcsin x), \quad \sin(\arccos x), \quad \cos(\arctan x).$$
2. Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$
   (a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
   (b) En posant $x = \sin t$, simplifier l'écriture de f.
3. (a) Démontrer que, pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a $\frac{1-\cos t}{\sin t} = \tan(t/2)$.
   (b) En déduire une forme simplifiée de $\arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$.

Exercice 16. *Étude de fonctions*

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$. (Écrire la fonction en utilisant l'exponentielle, déterminer le domaine de définition de f, calculer sa dérivée, tracer la fonction.)
2. (a) Pour quelles valeurs de x a-t-on $\sqrt{1-x^2} \leq x$?
   (b) Etudier la fonctions $x \mapsto \sqrt{1-x^2}\exp\big(\arcsin(x)\big)$.
3. On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f. Préciser la dérivée sur ce dernier ensemble.
   (b) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

(c) Démontrer que :

$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = 2\text{Arctan}(x).$$

Déterminer des expressions similaires de $f(x)$ sur les autres intervalles de définition de f.

Exercice 17. *Une étude de fonction, fonction réciproque*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\arctan(2x+1))$.

1. Étudier le sens de variation de f, ses limites en $\pm\infty$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Montrer que la restriction de f à $[-1/2, +\infty[$ admet une fonction réciproque g dont on précisera l'ensemble de définition.
4. Calculer $g'(\sqrt{2}/2)$.

Exercice 18. *Théorème de la bijection et fonctions hyperboliques*

1. Montrer que la fonction sinus hyperbolique, sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par sh : $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ est une bijection. On notera Argsh sa réciproque.
2. Montrer que la fonction cosinus hyperbolique, ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par ch : $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, restreinte à $\mathbb{R}_+$, et co-restreinte à un intervalle à déterminer, réalise une bijection. On notera Argch sa réciproque.
3. Exprimer les dérivées des fonctions sh et ch à l'aide de ces deux mêmes fonctions.
4. Vérifier que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}(x)^2 - \text{sh}(x)^2 = 1$.
5. Déterminer les dérivées des fonctions hyperboliques réciproques Argsh et Argch.
6. Calculer explicitement à l'aide de fonctions déjà connues l'expression des fonctions Argsh et Argch.

Exercice 19. *Équations trigonométriques plus délicates*

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1 \tag{1}$$

$$\sin x + \cos x - \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2}+1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \tag{2}$$

$$1 + \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(4x) = 0 \tag{3}$$

$$\cos^3 x \sin(3x) + \sin^3 x \cos(3x) = \frac{3}{4} \tag{4}$$

$$\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) - 2\cos x + 1 = 0 \tag{5}$$

$$2\sin x\cos x + (\sqrt{3}-1)\cos^2 x - (\sqrt{3}+1)\sin^2 x = 0 \tag{6}$$

$$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 2 \tag{7}$$

$$\sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x) \tag{8}$$

$$\cos x\cos(7x) = \cos(3x)\cos(5x) \tag{9}$$

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} - \tan x + \frac{1}{\tan x} = 0 \tag{10}$$

$$\cos(3x) + \sin(3x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

$$\sin(9x) + \sin(5x) + 2\sin^2 x = 1 \tag{12}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 \tag{13}$$