Nombres complexes

Exercice 1. *Ensemble de points du plan complexe.*

Déterminer l'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$|z - i| = |z + i|.$$

Indication : on pourra interpréter cet énoncé en termes de distances afin de deviner la réponse. Pour démontrer le résultat, il faut éléver au carré cette égalité entre deux nombres positifs et utiliser l'identité $|Z|^2 = Z\overline{Z}$.

Exercice 2. *Prouver qu'un complexe est réel*

Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.

Exercice 3. *Triangle rectangle inscrit dans le cercle trigonométrique*

Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que :

$$|z| = 1 \iff \frac{1 + z}{1 - z} \in i\mathbb{R}.$$

Exercice 4. *Inégalités et modules*

1. Montrer que si a, b et c sont trois complexes, alors on a :

$$|1 + a| + |a + b| + |b| \geq 1$$

2. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z + 1| \leq \dfrac{1}{2}$, montrer que l'on a $|z^2 + 1| \geq 1$.

Exercice 5. *Automorphismes du disque*

Soit a un complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z

$$1 - \left|\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left|\dfrac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right| \leq 1$.

Exercice 6. *Majoration d'une somme géométrique*

Montrer que l'on a pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| \leq \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|}$$

Exercice 7. *Inégalité triangulaire*

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = nz^n$.

1. Montrer que $|z| \leq 1$.
2. Si $|z| = 1$, montrer que $z = 1$.

Exercice 8. *Linéarisation*

Linéariser les expressions suivantes, c'est à dire transformer les produits de sinus ou cosinus en sommes :

1. $A(x) = \sin^2 x \cos^2 x$
2. $B(x) = 8 \sin^3 x$
3. $C(x) = \cos^5 x$
4. $D(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

Exercice 9. *Module et argument d'un nombre et de ses puissances*

Mettre sous forme algébrique, puis trigonométrique le nombre complexe $Z = \dfrac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$. Calculer Z^3.

Exercice 10. *Passage de la forme polaire à la forme cartésienne*

Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/4$.

Exercice 11. *Passage de la forme cartésienne à la forme polaire*

Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$.
En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 12. *Aller-retour entre forme algébrique et trigonométrique*

Donner la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe suivant :

$$\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}.$$

Exercice 13. *Puissances*

1. Donner la forme polaire de : $1 + i$, $1 - i$, $i - 1$, $\sqrt{3} + i$.
   En déduire :
   $$\frac{(i-1)^5}{(i+1)^4},\ (1+i)^{44},\ \left(\frac{-4}{\sqrt{3} + i} \right)^{19}$$
2. Calculer $(1 + i)^{25}$ et $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$
3. Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

Exercice 14. *Cosinus, sinus et tangente de* $\frac{\pi}{12}$

Soit $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer les parties réelles et imaginaires de z_3.
2. Déterminer les modules et arguments de z_1 et z_2, en déduire la forme polaire de z_3.
3. Déterminer enfin $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 15. *Module et argument*

Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $1+z$ et de $1+z+z^2$.

Exercice 16. *Racines carrées*

1. Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3}+i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = 3+4i,\ z_2 = 8-6i$.

Exercice 17. *Equations du second degré*

Résoudre les équations du second degré suivantes :

1. $2z^2 - 10z + 13 = 0$	**2**. $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$ $(\theta \in \mathbb{R})$
3. $iz^2 + z + 3 + i = 0$	**4**. $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$
5. $z^2 - (7+i)z + 12 + 3i = 0$	**6**. $iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0$

Exercice 18. *Factorisation d'une équation bicarrée dans* $\mathbb{C}$ *puis dans* $\mathbb{R}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + Z + 1 = 0$ d'inconnue Z.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + z^2 + 1$ d'inconnue z.
3. Déduire des questions précédentes une factorisation de $z^4 + z^2 + 1$ sous la forme :
$$z^4 + z^2 + 1 = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4),$$
où α_1, α_2, α_3 et α_4 sont des complexes à déterminer.
4. Déduire de la question précédente une factorisation de $z^4 + z^2 + 1$ sous la forme :
$$z^4 + z^2 + 1 = (z^2 + az + b)(z^2 + cz + d),$$
où a, b, c et d sont des réels à déterminer.

Exercice 19. *Equations du type* $z^n = a$.

1. Déterminer les racines cubiques de $1+i$.
2. Résoudre les équations suivantes :

1. $z^5 = -i$	**2**. $z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$
3. $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$.	**3**.$z^n = 1 - i\sqrt{3}$.

NB : $n \geq 2$ désigne un entier dans la dernière équation.

Exercice 20. *Calcul de sommes des racines 7-ièmes de l'unité*

On considère $a = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $S = a + a^2 + a^4$ et $T = a^3 + a^5 + a^6$.

1. Calculer $S + T$ et $S \cdot T$.
2. En déduire les valeurs de S et T.

Exercice 21. *Equations dans $\mathbb{C}$, racines de l'unité*

1. Résoudre l'équation $z^3 = \bar{z}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, résoudre l'équation $(z-1)^n = z^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   (b) Montrer que toutes les solutions de l'équation précédente sont les affixes de points alignés sur une même droite parallèle à l'axe des imaginaires purs.
   Remarque : cette droite ne dépend pas de n.
3. Soit $n \geq 2$ un entier. Résoudre l'équation $z^n = \bar{z}$.

Exercice 22. *Exponentielle complexe*

Résoudre les équations d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = 3\sqrt{3} - 3i$$

$$e^{2z} = \frac{e}{\sqrt{2}} - i\frac{e}{\sqrt{2}}$$

Exercice 23. *Affixes et alignement de points*

On considère les trois points A, B et C d' affixes respectives : $a = -2-2i$, $b = 1-i$ et $c = 10+2i$,

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer en utilisant 1) que A, B et C sont alignés.

Exercice 24. *Affixes et triangles*

Soient trois points A, B et C d'affixes respectives : $a = 3$, $b = \frac{5}{2} + \frac{7}{2}i$ et $c = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

1. Placer A, B et C sur une figure.
2. Calculer $|b-a|$; $|a-c|$ et $|c-b|$.
3. Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.
4. Déterminer l'affixe du milieu K du segment $[BC]$.
5. En déduire l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré.

Exercice 25. *Affixes et orthogonalité*

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison a où a est un imaginaire pur non nul. Montrer que si M_n a pour affixe z_n alors le triangle $(M_nM_{n+1}M_{n+2})$ est rectangle en M_{n+1}.

Exercice 26. *Intersection d'une droite et d'un cercle*

Déterminer les nombres complexes non nuls z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

Exercice 27. *Affixes des points remarquables d'un triangle*

On donne les coordonnées des trois sommets d'un triangle $a = 1 + i$, $b = 1 - i$ et $c = 3 + 2i$. Calculer les coordonnées des pieds des trois hauteurs du triangle, de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit.

Exercice 28. *Caractérisation des triangles équilatéraux*

Soient A, B et C trois points non alignés d'affixe a, b et c.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.
2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Exercice 29. *Orthogonalité et distances*

Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls. Démontrer que

$$|z + z'| = |z - z'| \Longleftrightarrow \theta' = \theta + \frac{\pi}{2}[\pi].$$

Exercice 30. *Théorème de Napoléon*

Soit ABC un triangle quelconque. On considère les trois triangles équilatéraux de base $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ construits à l'extérieur du premier. Montrer que les centres de gravité de ces trois triangles forment un triangle équilatéral.

Exercice 31. *Polygones réguliers avec des sommets à coordonnées entières*

Si $ABCD$ est un carré tel que A et B ont leurs coordonnées entières (dans $\mathbb{Z}$), montrer qu'il en est de même pour C et D.
Existe-t-il un triangle équilatéral dont toutes les coordonnées sont entières ?

Exercice 32. *Ensembles de points*

Déterminer, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points d'affixe z tels que :

1. $|z + 6i| = |z - 4 + i|$.
2. $|2z - 3i + 7| = 4$.
3. $|(1 + i)z - 2i| = 2$.
4. $\left|\dfrac{-3i + 7}{z + i}\right| = 2$.
5. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z - 1}{z - i}\right) = 0$.
6. les points d'affixes i, iz et z sont alignés.
7. les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle équilatéral.
8. les points d'affixes z, z^2 et z^4 sont alignés.

Exercice 33. *Écriture complexe de transformations*

1. Soit ϕ la transformation du plan complexe qui au point d'affixe z associe le point d'affixe z' tel que :

$$z' = az + 3i$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de cette transformation lorsque $a = 2$, puis lorsque $a = -i$.

2. On donne $c = 1$, $d = 2 + i$, $c' = 2i$ et $d' = 1 + i$. Vérifier les deux segments $[cd]$ et $[c'd']$ ont même longueur. Démontrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(c) = c'$ et $r(d) = d'$. La déterminer.

Exercice 34. *Analyse de transformations du plan*

Indiquer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

1. $\phi : z \longmapsto e^{i\frac{\pi}{3}} z - 2$,
2. $\chi : z \longmapsto (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})z + 3i$,

Exercice 35. *Composées de transformations*

1. Indiquer les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
   (a) $\phi : z \longmapsto 2z - 2$,
   (b) $\chi : z \longmapsto \frac{1}{2}z + 3i$,
   (c) $\psi : z \longmapsto z + 1$,
2. Indiquer les éléments caractéristiques des transformations suivantes :
   (a) $\phi \circ \chi$
   (b) $\chi \circ \phi$
   (c) $\chi \circ \phi \circ \chi$
   (d) $\chi \circ \psi$

Exercice 36. *Application des homothéties*

On considère trois cercles disjoints dans le plan, de rayons tous différents. Lorsque l'on considère deux de ces cercles, il existe deux tangentes extérieures communes de sorte que nos deux cercles se trouvent entre ces deux tangentes. Ces deux tangentes se rencontrent en un point. Le but de cet exercice est de prouver que les trois points ainsi définis, en choisissant pour chacun deux des trois cercles, sont alignés.

1. Etant donnés deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres d'affixe c_1 et c_2, de rayons r_1 et r_2 distincts, montrer qu'il existe une seule homothétie de rapport positif qui transforme $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$. Déterminer en fonction de c_1, c_2, r_1 et r_2 l'affixe du centre de cette homothétie. Préciser le lien avec les tangentes extérieures évoquées au début de l'exercice.
2. Soient deux homothéties de centres ω_1 et ω_2 dont les rapports k_1 et k_2 vérifient $k_1 k_2 \neq 1$, montrer que la composée de ces deux homothéties est une homothétie dont le centre ω est aligné avec ω_1 et ω_2.
3. Conclure