Devoir à la maison

Exercice 1. *Echauffement*

On note $\omega = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Calculer ω^2, ainsi que son module et un argument.
2. Déterminer alors la forme trigonométrique de ω.
3. Calculer ω^9.

Exercice 2. *Fonction sur $\mathbb{C}$ et équations de degré 2*

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{2i\} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\},\ f(z) = \frac{z^2}{z-2i}.$$

1. Déterminer les racines carrées de $8-6i$.
   En déduire les antécédents de $1+i$ par f.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Discuter selon la valeur de a le nombre d'antécédents de a par f.

Exercice 3. *Equations dans les nombres complexes*

1. Déterminer l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z+1| = |z-1|$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 + 16z^2 + 100 = 0$$

Exercice 4. *Centre d'un cercle selon Napoléon*

Dans cet exercice, on décrit la méthode de Napoléon pour retrouver le centre d'un cercle déjà tracé à l'aide du compas seul. L'objectif est de démontrer grâce aux nombres complexes que cette méthode est juste. On a donc un cercle tracé dans un plan, et l'on veut retrouver le centre de ce cercle. On se munit pour cette étude théorique d'un repère du plan centré sur le centre O du cercle, et l'unité de longueur de notre repère est choisie de telle façon que le cercle étudié est le cercle trigonométrique de ce repère. Il est recommandé de réaliser une figure.

1. Pointant sur le point d'affixe 1, on trace un cercle de rayon strictement plus grand que 1 et strictement plus petit que 2. On obtient ainsi deux points d'intersection avec le cercle de départ. Notons z l'affixe de l'un des deux points d'intersection, exprimer en fonction de z l'affixe du deuxième point et préciser la valeur de $|z|$.
2. Dans toute la suite de cet exercice, on appelera les points par leurs affixes pour ne pas alourdir les notations. La deuxième étape de la construction consiste à tracer le point u tel que $1,z,u,\bar{z}$ forme un losange. Calculer u en fonction de z et $\bar{z}$.
3. On trace ensuite le cercle centré sur u et de rayon $|u-1|$, ainsi que le cercle centré sur 1 et de rayon $|z-1|$. On note v un des deux points d'intersection. Ecrire les deux équations de cercle que doit vérifier v en complexes.
4. On construit enfin le point w de sorte que $1,v,w,\bar{v}$ forme un losange. Calculer w en fonction de v et $\bar{v}$
5. Montrer que $w = 0$, c'est à dire que le dernier point que l'on a construit est le centre du cercle de départ.
   Indication : On pourra utiliser la question 2 pour remplacer $z+\bar{z}$ par une expression en fonction de u dans les équations de la question 3.