Devoir surveillé

Exercice 1. *Étude de fonctions*

1. On étudie dans cette première partie la fonction f définie par :
$$f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - 1}.$$
   (a) Préciser sur quel ensemble f est dérivable, et calculer sa dérivée.
   (b) Étudier le signe de f', puis dresser le tableau de signe de cette dérivée.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) Donner l'allure de la courbe de f.
2. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$ par :
$$g(x) = \frac{x(x^2+1)}{2x+1}$$
   (a) Montrer que g est dérivable sur son domaine de définition et calculer $g'(x)$ en fonction de x.
   (b) Montrer que $g'(x) = \dfrac{(x+1)(ax^2+bx+c)}{(2x+1)^2}$ où a, b et c sont trois réels à préciser puis dresser le tableau de signe de g'.
   (c) Préciser les limites de g aux bords de son domaine de définition.
   (d) Dresser le tableau de variations de g.

Exercice 2. *Une fonction associée à l'inverse*

On note $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, g(x) = \frac{2x+3}{2x+2}.$$

1. On fait subir au graphe $\mathcal{C}_g$ de g les translations de vecteur $(1,0)$ puis $(0,-1)$. Déterminer l'expression de la fonction h dont on a ainsi obtenu le graphe.
2. Montrer que $\mathcal{C}_h$, puis $\mathcal{C}_g$ admettent chacun un centre de symétrie que l'on précisera.

Exercice 3. *Une fonction périodique*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor 2x \rfloor - 2x$.

1. Montrer que 1 est une période de f.
2. Est-ce la plus petite période de f ?

Exercice 4. *Exercice bonus*

Soient a, b et c trois réels tels que l'on a :
$$\forall x \in [-1,1]\,,\ \left|ax^2+bx+c\right| \leq 1$$

1. Montrer que a, b et c vérifient nécessairement : $|a| \leq 2$, $|b| \leq 1$ et $|c| \leq 1$.
2. Montrer alors que l'on a :
$$\forall x \in [-1,1]\,,\ |2ax+b| \leq 4$$
3. Montrer que 4 est la plus petite constante telle que le résultat de la deuxième question reste vrai.