

Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. Étude de fonctions

1. On étudie dans cette première partie la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{2x - 1}.$$

- (a) f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, et dérivable sur ce domaine puisque quotient de deux fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas :

$$f'(x) = \frac{(2x - 4)(2x - 1) - 2(x^2 - 4x + 2)}{(2x - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x}{(2x - 1)^2}$$

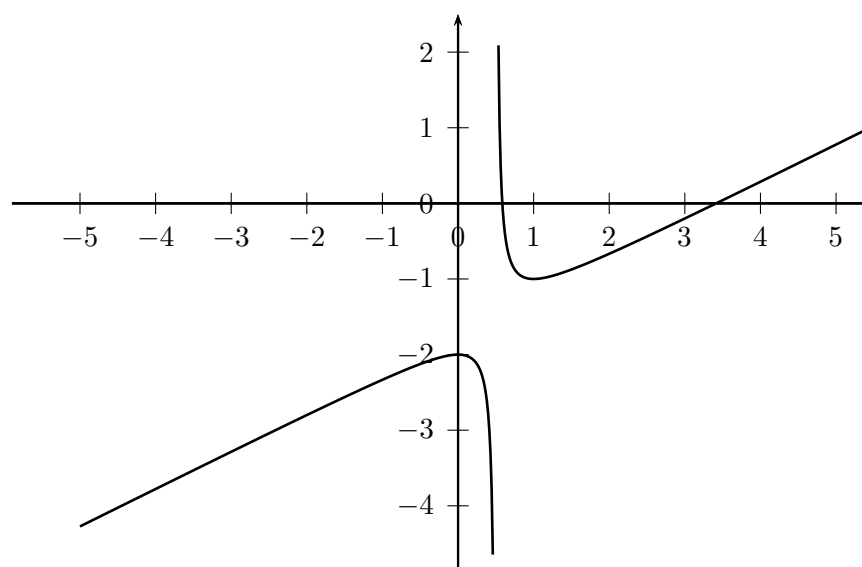
- (b) $T(x) = 2x^2 - 2x$ admet pour racines 0 et 1, donc est négatif sur $[0, 2]$, strictement positif ailleurs. On en déduit le tableau de signe de f' dont le dénominateur est un carré strictement positif :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	—	—	0	+

- (c) Dressons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 2 $\searrow$	$+\infty$	$\searrow$ -1 $\nearrow$	$+\infty$

- (d) Allure de la courbe de f :



2. Dans cette partie, on considère la fonction $g : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$ par :

$$g(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{2x + 1}$$

- (a) Le numérateur de l'expression de g ainsi que son dénominateur sont dérivables : il s'agit de fonctions polynômes. Le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ donc g est dérivable sur cet ensemble où elle est définie.
- (b) On a $g'(x) = \frac{4x^3 + 3x^2 + 1}{(2x + 1)^2} = \frac{(x + 1)(4x^2 - x + 1)}{(2x + 1)^2}$

On en déduit le tableau de signe de g' .

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$+$

- (c) g admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$, et l'on peut observer que $\frac{g(x)}{x}$ n'a pas de limite finie en $+\infty$ ni $-\infty$ donc il n'y a pas de droite asymptote à la courbe $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$.

En $-\frac{1}{2}$ à gauche, une rapide étude de signe nous indique que le dénominateur de g tend vers 0 en étant négatif et son numérateur tend vers -2 donc $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} g(x) = +\infty$. De même avec

le signe opposé, on a $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} g(x) = -\infty$.

Les deux parties de la courbe $\mathcal{C}_g$ admettent donc la même asymptote verticale en ce point, d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

- (d) Dressons le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$	$+\infty$

Diagram illustrating the variation of $g(x)$ between the asymptote $x = -\frac{1}{2}$ and the limits at $-\infty$ and $+\infty$. Arrows indicate the direction of the function: from $+\infty$ at $-\infty$ down to a local minimum at $x = -1$ (value 2), then up to $+\infty$ as $x \rightarrow -\frac{1}{2}^-$. On the right side of the asymptote, the function comes from $-\infty$ at $x \rightarrow -\frac{1}{2}^+$ and increases towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 2. Une fonction associée à l'inverse

On note $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, g(x) = \frac{2x+3}{2x+2}.$$

1. On fait subir au graphe $\mathcal{C}_g$ de g les translations de vecteur $(1, 0)$ puis $(0, -1)$.
Déterminer l'expression de la fonction h dont on a ainsi obtenu le graphe.
Après la translation de vecteur $(1, 0)$, on obtient la fonction :

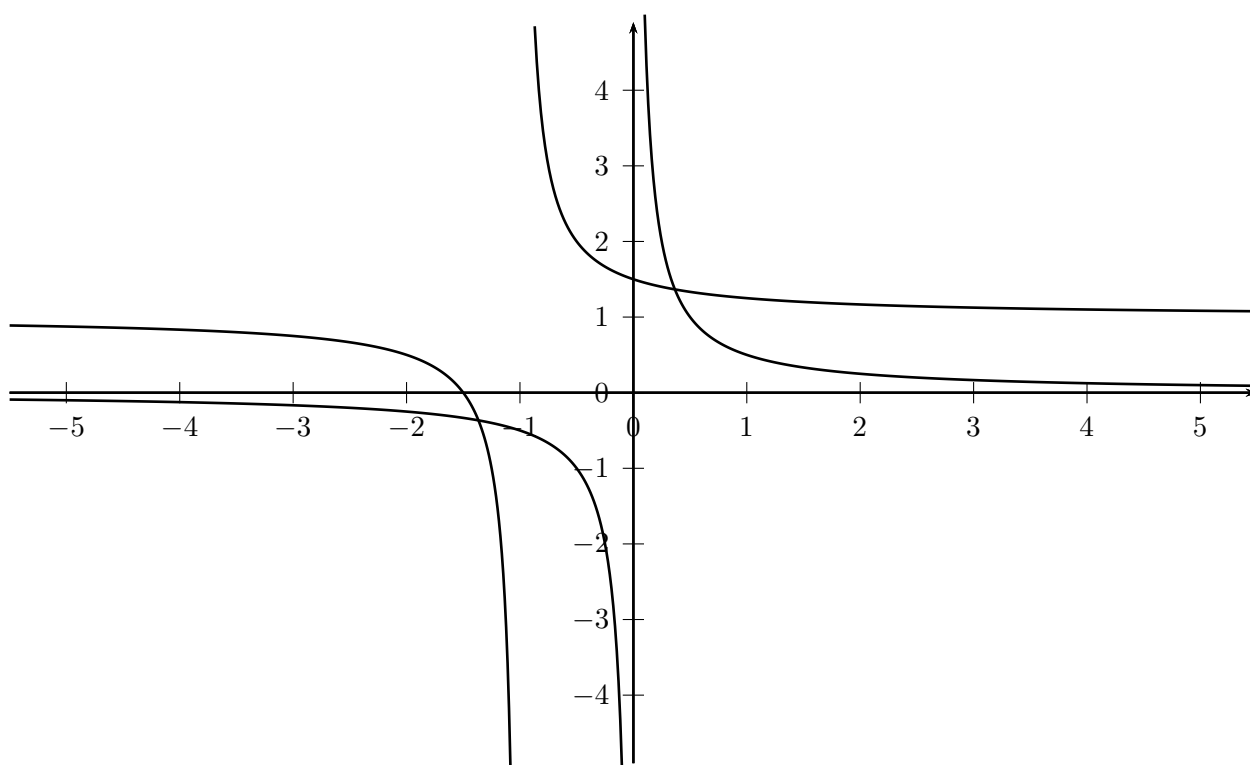
$$j : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$j : x \mapsto g(x-1) = \frac{2x+1}{2x} = 1 + \frac{1}{2x}$$

Après la translation de vecteur $(0, -1)$, on obtient la fonction :

$$h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h : x \mapsto j(x) - 1 = \frac{1}{2x}$$



2. Montrer que $\mathcal{C}_h$, puis $\mathcal{C}_g$ admettent chacune un centre de symétrie que l'on précisera.
On remarque que h est une fonction impaire, on en déduit que $\mathcal{C}_h$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(0, 0)$.
Puisque l'on peut retrouver $\mathcal{C}_g$ en faisant subir la translation de vecteur $(-1, 1)$ à $\mathcal{C}_h$, on en déduit que $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport au point de coordonnées $(-1, 1)$.

Exercice 3. Une fonction périodique

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = [2x] - 2x$.

1. Montrer que 1 est une période de f .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait qu'il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq 2x < k+1$ et c'est cet entier qui vaut $[x] = k$.

On a alors $k + 2 \leq 2x + 2 < k + 3$, d'où l'on déduit que $\lfloor 2x + 2 \rfloor = k + 2 = \lfloor 2x \rfloor + 2$.
Enfin, on a donc :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \lfloor 2(x+1) \rfloor - 2(x+1), \\ f(x+1) &= \lfloor 2x + 2 \rfloor - 2x - 2, \\ f(x+1) &= \lfloor 2x \rfloor + 2 - 2x - 2, \\ f(x+1) &= f(x). \end{aligned}$$

f est bien périodique de période 1.

2. Est-ce la plus petite période de f ? On va prouver que $\frac{1}{2}$ est aussi une période de f . Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on sait qu'il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq 2x < k + 1$ et c'est cet entier qui vaut $\lfloor x \rfloor = k$. On a alors $k + 1 \leq 2x + 1 < k + 2$, d'où l'on déduit que $\lfloor 2x + 1 \rfloor = k + 1 = \lfloor 2x \rfloor + 1$.

Enfin, on a donc :

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \lfloor 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \rfloor - 2\left(x + \frac{1}{2}\right), \\ f\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \lfloor 2x + 1 \rfloor - 2x - 1, \\ f\left(x + \frac{1}{2}\right) &= \lfloor 2x \rfloor + 1 - 2x - 1, \\ f\left(x + \frac{1}{2}\right) &= f(x). \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{2}$ est aussi une période de f , 1 n'est pas la plus petite.

Exercice 4. Exercice bonus

Soient a , b et c trois réels tels que l'on a :

$$\forall x \in [-1, 1], |ax^2 + bx + c| \leq 1$$

1. Montrer que a , b et c vérifient nécessairement : $|a| \leq 2$, $|b| \leq 1$ et $|c| \leq 1$.

En choisissant $x = 0$, on obtient immédiatement $|c| \leq 1$.

Pour $x = 1$ et $x = -1$, on obtient $|a + b + c| \leq 1$ et $|a - b + c| \leq 1$.

Ainsi, $|a + b + c - (a - b + c)| \leq |a + b + c| + |a - b + c| \leq 2$, i.e. $|2b| \leq 2$ et donc $|b| \leq 1$.

On a aussi $|a + b + c + a - b + c| \leq |a + b + c| + |a - b + c| \leq 2$, i.e. $|2a + 2c| \leq 2$, soit $|a + c| \leq 1$.

Ainsi, $|a| = |a + c + (-c)| \leq |a + c| + |c| \leq 2$.

2. Montrer alors que l'on a :

$$\forall x \in [-1, 1], |2ax + b| \leq 4$$

Ici, il s'agit de remarquer qu'une fonction affine comme $x \mapsto 2ax + b$ est ainsi comprise entre -4 et 4 sur l'intervalle $[-1, 1]$ si et seulement si ses valeurs en -1 et 1 le sont.

Il s'agit donc de prouver $|2a + b| \leq 4$ et $|-2a + b| \leq 4$.

On réutilise ($x = 1$) $|a + b + c| \leq 1$: $|a + b + c + (-c)| \leq |a + b + c| + |c| \leq 2$ donc $|a + b| \leq 2$.

D'où $|a + a + b| \leq |a| + |a + b| \leq 4$.

De même, ($x = -1$) $|a - b + c| \leq 1$: $|a - b + c + (-c)| \leq |a - b + c| + |c| \leq 2$ donc $|a - b| \leq 2$.

D'où $|a + a - b| \leq |a| + |a + b| \leq 4$.

3. Montrer que 4 est la plus petite constante telle que le résultat de la deuxième question reste vrai : pour $a = 2$, $b = 0$ et $c = -1$, l'inégalité ci-dessus est une égalité en -1 et 1 .