

Devoir surveillé

On traitera au choix la première page ou la deuxième. Si vous choisissez le problème en page 2, précisez sur votre copie : sujet BIS.

Exercice 1. Equations

1. Equations et détermination des cosinus et sinus d'un angle.

- (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(4t) = 0$.
- (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.
- (c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

2. Equations trigonométriques.

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \quad (2)$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(2x) = 0 \quad (3)$$

Exercice 2. Etude de fonction

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

- 1. Déterminer l'ensemble de définition de f et l'ensemble des points où elle est dérivable. Calculer la dérivée de f sur $] -1, 1[$.
- 2. Etudier les variations de f sur $] -1, 1[$ et tracer sa courbe représentative sur cet intervalle.
- 3. Démontrer que :

$$\forall x \in] -1, 1[, f(x) = 2\operatorname{Arctan}x.$$

Exercice 3. Autour du logarithme

- 1. Résoudre les inéquations suivantes (on précisera le domaine de définition) :

$$(I) (2x - 7) \ln(x + 1) > 0 \quad (J) \ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq 0.$$

- 2. On étudie dorénavant la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right).$$

- (a) Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}$:

$$\frac{x-1}{3x-4} > 0.$$

On notera D_g l'ensemble de ses solutions, qui est le domaine de définition de g .

- (b) Préciser les limites de g : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} g(x)$.

- (c) Justifier que g est dérivable sur D_g , et que l'on a :

$$\forall x \in D_g, g'(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2(3x-4)(x-1)}.$$

- (d) Réaliser le tableau de variations de g .

Problème (Sujet BIS)

On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, f(x + y) \geq f(x) + f(y) \text{ (on dit que } f \text{ est sur-additive),} \quad (4)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, f(xy) = f(x)f(y) \text{ (on dit que } f \text{ est multiplicative).} \quad (5)$$

1. Soit α un réel supérieur ou égal à 1.
 - (a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $(1 + x)^\alpha \geq 1 + x^\alpha$.
 - (b) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x + y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha$.
 - (c) On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$.
Justifier que f est solution du problème posé.
2. (a) Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème étudié ?
Dans toute la suite du problème, on considère une fonction f non constante qui est solution de celui-ci.
 - (b) Montrer que l'on a alors $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
 - (c) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x^n) = f(x)^n$.
 - (d) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \neq 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.
 - (e) Prouver enfin que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \in \mathbb{R}_+$.
 - (f) Montrer que f est croissante.
3. On considère encore dans ces dernières questions une fonction f non constante qui est solution du problème.
 - (a) Justifier que $\ln(f(2))$ est bien défini et que $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$.
 - (b) Justifier : $\forall x > 0, \exists ! q \in \mathbb{Z}$ tel que $2^q \leq x < 2^{q+1}$.
 - (c) Soit $x > 0$ un réel et p un entier naturel.
On convient de noter q_p l'unique entier tel que $2^{q_p} \leq x^p < 2^{q_p+1}$.
 - i. Déterminer la limite du rapport $\frac{q_p}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.
 - ii. En observant l'encadrement $f(2)^{q_p} \leq f(x)^p \leq f(2)^{q_p+1}$, justifier :
$$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leq \frac{q_p + 1}{p}.$$
 - iii. Si $x \neq 1$, en déduire que $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.
 - (d) On pose $\alpha = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)} \geq 1$. Justifier que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^\alpha.$$