

Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. Equations

1. Equations trigonométriques.

Résolvons les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

Cette équation a donc deux types de solutions : $2x + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ ou $2x + \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi]$.

Après simplification, on obtient : $x \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$ ou bien $x \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

$$\cos(5x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 5x &\equiv \frac{2\pi}{3} - x [2\pi] & \text{ou } 5x &\equiv -\frac{2\pi}{3} + x [2\pi] \\ 6x &\equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] & \text{ou } 4x &\equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \\ x &\equiv \frac{\pi}{9} \left[\frac{\pi}{3}\right] & \text{ou } x &\equiv -\frac{\pi}{6} \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(2x) = 0 \quad (3)$$

$$\cos(2x) = -\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos(2x) = \cos(\pi - x)$$

On a donc encore une fois deux types de solutions : $2x \equiv \pi - x [2\pi]$ ou $2x \equiv x - \pi [2\pi]$.

Après simplification, on obtient : $x \equiv \frac{\pi}{3} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv -\pi [2\pi]$. On remarque que les x qui vérifient la deuxième condition vérifient aussi la première donc l'ensemble des solutions est $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. Equations et détermination des cosinus et sinus d'un angle.

- (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(4t) = 0$.

Les solutions sont les $t \in \mathbb{R}$ tels que :

$$4t \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$t \equiv \frac{\pi}{8} \left[\frac{\pi}{4}\right]$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$.

On considère le trinôme $T(X) = 8X^2 - 8X + 1$, dont le discriminant vaut $\Delta = 32$ et les deux racines sont $X_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $X_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

L'équation à résoudre équivaut à $T(x^2) = 0$, donc les solutions sont les $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 = X_1$ ou $x^2 = X_2$. On a quatre solutions qui forment l'ensemble :

$$\left\{ \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}; -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}; \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}; -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \right\}.$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right\}.$$

(c) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

On rappelle que $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ d'où l'on déduit :

$$\cos(4t) = 2\cos^2(2t) - 1$$

$$\cos(4t) = 2(2\cos^2 t - 1)^2 - 1$$

$$\cos(4t) = 2(4\cos^4 t - 4\cos^2 t + 1) - 1$$

$$\cos(4t) = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$$

De ceci, on déduit pour $t = \frac{\pi}{8}$ et $t = \frac{3\pi}{8}$, que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ sont des solutions de l'équation de la question précédente. Puisque $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on obtient par stricte décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi]$:

$$1 > \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 0.$$

Parmi les quatre solutions de l'équation de la question précédente, seules deux sont positives et l'on déduit finalement des inégalités précédentes :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 2. Fonctions trigonométriques réciproques

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$, que f est dérivable sur $] -1, 1[$, calculer sa dérivée $f'(x)$ pour $x \in] -1, 1[$.

On prouve d'abord que f est définie sur $\mathbb{R}$. Puisque Arcsin est définie sur $[-1, 1]$, on doit donc vérifier que pour tout x réel, on a :

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

Puisque $x^2 + 1 > 0$, cette double inégalité équivaut à :

$$-x^2 - 1 \leq 2x \leq x^2 + 1$$

La première inégalité équivaut à $0 \leq 2x + x^2 + 1$ i.e. $0 \leq (x+1)^2$, et la deuxième à $0 \leq x^2 + 1 - 2x$ i.e. $0 \leq (x-1)^2$. Les deux inégalités que l'on souhaitait vérifier sont donc justes.

Comme Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$, on remarque que les deux inégalités précédentes sont strictes si $x \notin \{-1, 1\}$, donc f est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, et en particulier sur $] -1, 1[$. On calcule alors pour $x \in] -1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} \text{Arcsin}'\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2}}}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)\sqrt{(1+x^2)^2}}{(1+x^2)^2\sqrt{1+x^4-2x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)^2\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

2. Démontrer que :

$$\forall x \in] -1, 1[, f(x) = 2\text{Arctan}x.$$

On note h la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $h : x \mapsto f(x) - 2\text{Arctan}(x)$.

h est dérivable, sa dérivée est nulle d'après le calcul précédent. Ainsi, h est une fonction constante. Puisque $h(0) = 0$, on en déduit que h est la fonction nulle et le résultat attendu.

Exercice 3. Autour du logarithme

1. Résoudre les inéquations suivantes (on précisera le domaine de définition) :

$$(I) (2x - 7) \ln(x + 1) > 0 \quad (J) \ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \leq 0.$$

— (I) est définie pour $x \in]-1, +\infty[$.

On réalise un tableau de signe sur cet intervalle :

x	-1	0	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$2x - 7$		$-$	0	$+$
$\ln(x + 1)$		$-$	0	$+$
$(2x - 7) \ln(x + 1)$		$+$	0	$-$

On en déduit l'ensemble des solutions : $] -1, 0[\cup] \frac{7}{2}, +\infty[$.

— (J) est définie lorsque $\frac{x+1}{3x-5} > 0$. On réalise un tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	
$3x - 5$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{3x-5}$	$+$	0	$-$	$+$

Son domaine de définition est donc : $D_{(J)} =]-\infty, -1[\cup]\frac{5}{3}, +\infty[$. Pour $x \in D_{(J)}$, elle équivaut à :

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{3x-5} &> 1 \\ \frac{x+1}{3x-5} - 1 &> 0 \\ \frac{-2x+6}{3x-5} &> 0\end{aligned}$$

On réalise un dernier tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	3	$+\infty$
$3x - 5$	$-$	0	$+$	
$-2x + 6$		$+$	0	$-$
$\frac{-2x+6}{3x-5}$	$-$		$+$	0

L'ensemble des solutions est donc $] \frac{5}{3}, 3[$.

2. On étudie dorénavant la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right).$$

(a) Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{4}{3}\}$:

$$\frac{x-1}{3x-4} > 0.$$

x	$-\infty$	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$	$+$
$3x - 4$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x-1}{3x-4}$	$+$	0	$-$	$+$

L'ensemble des solutions est donc :

$$D_g =]-\infty, 1[\cup]\frac{4}{3}, +\infty[.$$

(b) Préciser les limites de g : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} g(x)$.

On a $\frac{x-1}{3x-4} = \frac{1-\frac{1}{x}}{3-\frac{4}{x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{3-\frac{4}{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

On remarque que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{3x-4} = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right) = -\infty$, d'où $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} \frac{x-1}{3x-4} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} \ln\left(\frac{x-1}{3x-4}\right) = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}^+} g(x) = +\infty$.

(c) Justifier que g est dérivable sur D_g , et que l'on a :

$$\forall x \in D_g, g'(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2(3x-4)(x-1)}.$$

g est dérivable car la fonction $x \mapsto \frac{x-1}{3x-4}$ est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et la fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On calcule alors pour $x \in D_g$:

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{3x-4-3(x-1)}{(3x-4)^2}}{\frac{x-1}{3x-4}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{-1}{(3x-4)^2}}{\frac{x-1}{3x-4}}$$

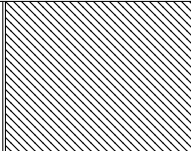
$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(x-1)(3x-4)}$$

$$g'(x) = \frac{(x-1)(3x-4) - 2}{2(x-1)(3x-4)}$$

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{2(3x-4)(x-1)}.$$

(d) Pour $x \in D_g$, on a $(3x-4)(x-1) > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $T(x) = 3x^2 - 7x + 2$. On calcule le discriminant de ce trinôme, $\Delta = 25$ puis ses deux racines $\frac{1}{3}$ et 2. Ainsi, ce trinôme est de signe négatif pour $x \in [\frac{1}{3}, 2]$, positif ailleurs.

On en déduit enfin le tableau de variations de g :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{6} + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$		$+\infty$	$-\ln(2)$	$+\infty$

Problème

On souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, f(x+y) \geq f(x) + f(y) \text{ (on dit que } f \text{ est sur-additive),} \quad (4)$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, f(xy) = f(x)f(y) \text{ (on dit que } f \text{ est multiplicative).} \quad (5)$$

1. Soit α un réel supérieur ou égal à 1.

(a) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $(1+x)^\alpha \geq 1+x^\alpha$.

On note :

$$h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h : x \mapsto (1+x)^\alpha - 1 - x^\alpha$$

On remarque que h est dérivable et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, h'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1}.$$

Or $\alpha - 1 \geq 0$ donc la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $h'(x) \geq 0$.

h est donc une fonction croissante, et l'on déduit du fait que $h(0) = 0$ que h est à valeurs positives : $\forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^\alpha - 1 - x^\alpha \geq 0$.

(b) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x+y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha$.

Si x ou y vaut 0, cette inégalité est une égalité et est donc vérifiée.

Si x et y sont différents de 0, on a alors d'après la question précédente appliquée au nombre $\frac{x}{y}$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^\alpha &\geq 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \\ y^\alpha \left(1 + \frac{x}{y}\right)^\alpha &\geq y^\alpha \left(1 + \frac{x^\alpha}{y^\alpha}\right) \\ \left(y\left(1 + \frac{x}{y}\right)\right)^\alpha &\geq y^\alpha + x^\alpha \\ (y+x)^\alpha &\geq y^\alpha + x^\alpha \end{aligned}$$

(c) On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^\alpha$.

Justifier que f est solution du problème posé.

D'après la question précédente, f est sur-additive. Or on sait que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha.$$

On en déduit que f est multiplicative et est donc une solution du problème posé.

2. (a) Quelles sont les fonctions constantes solutions du problème étudié ?

Une fonction constante en la valeur $C \in \mathbb{R}$ est solution si et seulement si $C \geq C + C$ et $C = C^2$. Ces deux conditions signifient respectivement que $C \leq 0$, et que $0 = C(C-1)$. On en déduit que la seule solution constante est la fonction nulle.

Dans toute la suite du problème, on considère une fonction f non constante qui est solution de celui-ci.

(b) Montrer que l'on a alors $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

On a $f(0 \times 0) = f(0)f(0)$ et $f(0+0) \geq f(0) + f(0)$ d'où l'on déduit d'une part que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$, et d'autre part que $f(0) \leq 0$. Ainsi, $f(0) = 0$.

Puisque f n'est pas constante, on a $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) \neq 0$.

Alors $f(1 \times x) = f(1)f(x)$ d'où $f(x)(1 - f(1)) = 0$ et donc $1 - f(1) = 0$ c'est à dire $f(1) = 1$.

- (c) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x^n) = f(x)^n$.

On le prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 1$, $f(x^1) = f(x) = f(x)^1$ donc la propriété est vraie.

On suppose dorénavant que $f(x^n) = f(x)^n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$f(x^{n+1}) = f(x^n \times x) = f(x^n)f(x) = f(x)^n f(x) = f(x)^{n+1}.$$

La propriété étant héréditaire, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- (d) Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \neq 0$ et $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a en effet :

$$f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(1)$$

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

On en déduit que $f(x) \neq 0$ et que $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

- (e) Prouver enfin que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \in \mathbb{R}_+^*$.

Si $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = f(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = f(\sqrt{x}) \times f(\sqrt{x}) = f^2(\sqrt{x}) \geq 0$ donc $f(x) \in \mathbb{R}_+$.

- (f) Montrer que f est croissante.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Alors on a $y - x \geq 0$ et :

$$f(y) = f(x + (y - x)) \geq f(x) + f(y - x)$$

Or $f(y - x) \in \mathbb{R}_+$ donc $f(x) + f(y - x) \geq f(x)$ et l'on conclut : $f(y) \geq f(x)$.

3. On considère encore dans ces dernières questions une fonction f non constante qui est solution du problème.

- (a) Justifier que $\ln(f(2))$ est bien défini et que $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$.

$\ln(f(2))$ est bien défini car $f(2) \in \mathbb{R}_+^*$ d'après la question 2(d).

$$f(2) = f(1 + 1) \geq f(1) + f(1) = 2$$

Donc on a $f(2) \geq 2$ d'où $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$ par croissance de $\ln$.

- (b) Justifier : $\forall x > 0, \exists ! q \in \mathbb{Z}, 2^q \leq x < 2^{q+1}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, cette double inégalité équivaut par stricte croissance de la fonction $\ln$ à :

$$q \ln(2) \leq \ln(x) < (q + 1) \ln(2)$$

$$q \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} < q + 1$$

On sait en effet qu'il existe un unique $q \in \mathbb{Z}$ vérifiant ceci, il s'appelle la partie entière de $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

- (c) Soit $x > 0$ un réel et p un entier naturel.

On convient de noter q_p l'unique entier relatif tel que $2^{q_p} \leq x^p < 2^{q_p+1}$.

- i. Déterminer la limite du rapport $\frac{q_p}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

On a en appliquant la fonction $\ln$ qui est croissante :

$$\ln(2^{q_p}) \leq \ln(x^p) \leq \ln(2^{q_p+1})$$

$$q_p \ln(2) \leq p \ln(x) \leq (q_p + 1) \ln(2)$$

$$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \leq \frac{(q_p + 1)}{p}$$

La deuxième inégalité nous donne $\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p} \leq \frac{q_p}{p}$ et l'on a donc :

$$\frac{\ln(x)}{\ln(2)} - \frac{1}{p} \leq \frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

On en déduit que $\frac{q_p}{p}$ tend vers $\frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

ii. En observant l'encadrement $f(2)^{q_p} \leq f(x)^p \leq f(2)^{q_p+1}$, justifier :

$$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leq \frac{q_p + 1}{p}.$$

L'encadrement observé provient de la croissance de f et sa multiplicativité.

Il suffit de le passer à la fonction $\ln$ pour en déduire :

$$q_p \ln(f(2)) \leq p \ln(f(x)) \leq (q_p + 1) \ln(f(2))$$

On en déduit la double inégalité voulue en divisant tout par $p \ln(f(2))$.

iii. Si $x \neq 1$, en déduire que $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.

On peut en effet conclure de la question précédente l'encadrement :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} - \frac{1}{p} \leq \frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))}.$$

On en déduit que $\frac{q_p}{p}$ tend vers $\frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))}$ lorsque p tend vers $+\infty$ d'où : $\frac{\ln(f(x))}{\ln(\ln(f(2)))} = \frac{x}{\ln(2)}$

donc $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.

(d) On pose $\alpha = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)} \geq 1$. Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^\alpha.$$

On a en effet si $x \in \mathbb{R}_+^* : \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \alpha$ d'où :

$$\ln(f(x)) = \ln(x^\alpha)$$

et donc $f(x) = x^\alpha$ en passant à l'exponentielle.

Pour $x = 0$, on a bien $f(0) = 0 = 0^\alpha$.