Programme des colles du 10/11 au 14/11

1. Fonctions usuelles
   (a) Logarithme et exponentielle
   - Logarithme défini comme la primitive de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
   - Propriétés du logarithme : logarithme d'un produit, de l'inverse, d'un quotient, d'une puissance entière naturelle ou relative.
   - Exponentielle.
   - Règles de calcul avec les puissances. Si les expressions ont un sens, on a pour x, y, a et b réels :
     i. $x^a \times x^b = x^{a+b}$
     ii. $x^a \times y^a = (xy)^a$
     iii. $(x^a)^b = x^{ab}$
     iv. $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
     v. $\ln(x^a) = a\ln(x)$
2. Complexes
   - Définition, addition et multiplication.
   - Conjugaison et propriétés, interprétation géométrique.
   - Module d'un complexe, interprétation en termes de distance.
   - Inégalité triangulaire : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| \leq |z| + |w|$.
     On a égalité s.si z et w sont positivement colinéaires.
   - Pour $z, w \in \mathbb{C}$, $\big||z| - |w|\big| \leq |z+w|$.
   - Généralisation à n complexes z_1, z_2,$\cdots$, z_n et cas d'égalité : $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$
   - Applications à la trigonométrie
     - Factorisations : angle moitié pour $1 \pm e^{i\theta}$, angle moyen pour $e^{ip} \pm e^{iq}$ et formules pour $\cos p \pm \cos q$, $\sin p \pm \sin q$.
     - Formules d'Euler, linéarisation, triangle de Pascal pour le développement de $(a+b)^n$.
     - Formule de Moivre.
     - **Sommes trigonométriques à savoir calculer pour $x \neq 0[2\pi]$:**

$$C_n = 1 + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx),$$

$$S_n = \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx).$$

   - Représentation trigonométrique et argument d'un complexe non nul.
   - Argument d'un produit, d'un quotient.
   - Transformation d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du type $f : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ en $f : x \mapsto A\cos(x - \phi)$
   - Factorisation par $(z - \alpha)$ d'une expression polynomiale en z qui s'annule pour $z = \alpha$.
   - Racines carrées d'un complexe non nul : sous forme polaire, sous forme algébrique.
   - Equation du second degré dans $\mathbb{C}$, somme et produit des racines et cas des coefficients réels.
   - **Racines n-ièmes de l'unité :**

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

     NB : il n'est pas obligatoire de connaître la preuve de cette propriété, mais il faut être capable de faire un dessin et d'expliquer l'emplacement de ces nombres dans le plan complexe.
   - Caractérisation des racines n-ièmes de l'unité autres que 1 par $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$
   - Fonction exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, propriété relativement à l'image d'une somme.
   - **Propriété concernant l'égalité d'exponentielles :**

$$\forall z,\, w \in \mathbb{C},\; e^z = e^w \;\Leftrightarrow z - w \in\; 2i\pi\mathbb{Z},$$

   - Angles, alignement et orthogonalité en utilisant les affixes complexes.
   - Transformations géométriques du plan complexe : translations, homothéties et rotations.