Programme des colles du 17/11 au 21/11

1. Complexes
   - Définition, addition et multiplication.
   - Conjugaison et propriétés, interprétation géométrique.
   - Module d'un complexe, interprétation en termes de distance.
   - Inégalité triangulaire : pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| \leq |z| + |w|$.
     On a égalité s.si z et w sont positivement colinéaires.
   - Pour $z, w \in \mathbb{C}$, $\big||z| - |w|\big| \leq |z+w|$.
   - Généralisation à n complexes z_1, z_2,$\cdots$, z_n et cas d'égalité : $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$
   - Applications à la trigonométrie
     - Factorisations : angle moitié pour $1 \pm e^{i\theta}$, angle moyen pour $e^{ip} \pm e^{iq}$ et formules pour $\cos p \pm \cos q$, $\sin p \pm \sin q$.
     - Formules d'Euler, linéarisation, triangle de Pascal pour le développement de $(a+b)^n$.
     - Formule de Moivre.
     - Sommes trigonométriques.
   - Représentation trigonométrique et argument d'un complexe non nul.
   - Argument d'un produit, d'un quotient.
   - Transformation d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ du type $f : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ en $f : x \mapsto A\cos(x - \phi)$
   - Factorisation par $(z - \alpha)$ d'une expression polynomiale en z qui s'annule pour $z = \alpha$.
   - Racines carrées d'un complexe non nul : sous forme polaire, sous forme algébrique.
   - Equation du second degré dans $\mathbb{C}$, somme et produit des racines et cas des coefficients réels.
   - **Racines n-ièmes de l'unité :**
     $$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} | k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$
     NB : il n'est pas obligatoire de connaître la preuve de cette propriété, mais il faut être capable de faire un dessin et d'expliquer l'emplacement de ces nombres dans le plan complexe.
   - Caractérisation des racines n-ièmes de l'unité autres que 1 par $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$
   - Fonction exponentielle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, propriété relativement à l'image d'une somme.
   - Propriété concernant l'égalité d'exponentielles : $\forall z,\ w \in \mathbb{C},\ e^z = e^w \Leftrightarrow z - w \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
   - Angles, alignement et orthogonalité en utilisant les affixes complexes.
   - Transformations géométriques du plan complexe : translations, homothéties et rotations.
   - Primitives de $f(x) = \cos(bx)e^{ax}$ ou $g(x) = \sin(bx)e^{ax}$.
2. Primitives et intégrales
   - Définition de l'intégrale d'une fonction continue à l'aide des primitives.
   - Primitives usuelles : puissances, exponentielles, trigonométriques, $\ln(x)$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{1+x^2}$
   - Propriétés : linéarité, Chasles, croissance.
   - Formule d'intégration par parties pour u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$:
     $$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$
     Savoir trouver la relation de récurrence qui lie W_n à W_{n+2} pour les intégrales de Wallis
     $$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$$
   - Formule de changement de variable pour $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\phi\ : [a, b] \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$:
     $$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x.$$
     Savoir faire intégralement l'exemple du cours :
     $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$$