Corrigé du devoir surveillé

1 Irrationalité du nombre π

1. Montrons la propriété suivante par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour toute fonction polynôme de la forme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ où $(q_0, q_1, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:
$$Q^{(k)}(0) = k! q_k.$$
Pour $n = 0$ et $Q(x) = q_0$, on a bien $Q^{(0)}(0) = Q(0) = q_0$.
Supposons que la propriété soit vraie au rang n, et soit alors
$$Q(x) = q_{n+1}x^{n+1} + q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0, \text{ où } (q_0, q_1, \cdots, q_n, q_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$
On a pour $k = 0$: $Q(0) = q_0$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q' puisque
$$Q'(x) = (n+1)q_{n+1}x^n + nq_n x^{n-1} + (n-1)q_{n-1}x^{n-2} + \cdots + q_1$$
est de degré n. Si $j \in [\![0, n]\!]$, le coefficient de Q' devant x^j est $(j+1)q_{j+1}$ donc :
$$(Q')^{(j)}(0) = j!(j+1)q_{j+1}, \text{ i.e. } Q^{(j+1)}(0) = (j+1)! q_{j+1}.$$
On a donc bien pour $k \in [\![1, n+1]\!]$ (en posant $k = j+1$), que $Q^{(k)}(0) = k! q_k$. Ceci prouve que l'hypothèse de récurrence est héréditaire, donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.
2. Si Q est une fonction polynôme de la forme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$, on note :
$$J(Q) = \int_0^\pi Q(x) \sin x \, \mathrm{dx}$$
   (a) Si $Q(x) = q_1 x + q_0$ est de degré 1, calculons :
$$J(Q) = \int_0^\pi (q_1 x + q_0) \sin x \, \mathrm{dx} = [-(q_1 x + q_0)\cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -q_1 \cos x \, \mathrm{dx} = q_1\pi + q_0 + q_0 + [q_1 \sin x]_0^\pi.$$
   Finalement, on a bien $J(Q) = Q(0) + Q(\pi)$.

   (b) Si $Q(x) = q_2 x^2 + q_1 x + q_0$ est de degré 2, calculons
$$J(Q) = \int_0^\pi (q_2 x^2 + q_1 x + q_0) \sin x \, \mathrm{dx} = \left[-(q_2 x^2 + q_1 x + q_0)\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi -(2q_2 x + q_1)\cos x \, \mathrm{dx}$$
$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) + [(2q_2 x + q_1)\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2q_2 \sin x \, \mathrm{dx} = Q(0) + Q(\pi) - 4q_2$$
   On a donc finalement : $J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - Q''(0) - Q''(\pi)$.

(c) On calcule pour une fonction polynôme Q :

$$J(Q) = [Q(x)(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi Q'(x)(-\cos x)\mathrm{dx} = Q(0)+Q(\pi)+\left[Q'(x)\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi Q''(x)\sin x\ \mathrm{dx}$$

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - \int_0^\pi Q''(x)\sin x\ \mathrm{dx}$$

(d) Montrons par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$ la propriété :
pour tout $n \leq 2N+1$ et tout polynôme $Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ de degré inférieur ou égal à n, $J(Q) = \sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k \left(Q^{(2k)}(0) + Q^{(2k)}(\pi)\right)$.
Pour $N = 0$, cette propriété a été démontrée au 2.(a).
Supposons qu'elle est vraie au rang N, et soit Q un polynôme de degré inférieur ou égal à $2(N+1)+1 = 2N+3$. On a alors :

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - \int_0^\pi Q''(x)\sin x\ \mathrm{dx}$$

On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à Q'' (car le degré de Q'' est $d^o(Q) - 2$ donc $d^o(Q) \leq 2N+3 \Rightarrow d^o(Q'') \leq 2N+1$), d'où l'on déduit :

$$\int_0^\pi Q''(x)\sin x\ \mathrm{dx} = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \left((Q'')^{(2k)}(0) + (Q'')^{(2k)}(\pi)\right)$$

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \left(Q^{(2(k+1))}(0) + Q^{(2(k+1))}(\pi)\right)$$

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) + \sum_{k=0}^{N}(-1)^{k+1} \left(Q^{(2(k+1))}(0) + Q^{(2(k+1))}(\pi)\right)$$

$$J(Q) = Q(0) + Q(\pi) + \sum_{i=1}^{N+1}(-1)^i \left(Q^{(2i)}(0) + Q^{(2i)}(\pi)\right)$$

$$J(Q) = \sum_{i=0}^{N+1}(-1)^i \left(Q^{(2i)}(0) + Q^{(2i)}(\pi)\right)$$

Ainsi, l'hypothèse de récurrence est héréditaire donc vraie pour tout $N \in \mathbb{N}$.

3. Dans cette question et la suivante, on s'intéresse à la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $P_n(x) = \dfrac{1}{n!}x^n(qx-p)^n$ où p, q sont deux entiers strictement positifs.

(a) Calculons à l'aide de la formule du binôme de Newton :

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (qx)^k(-p)^{n-k}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k} q^k(-p)^{n-k}x^{n+k}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}(-p)^n x^n + \frac{1}{n!}\binom{n}{1} q(-p)^{n-1}x^{n+1} + \cdots + \frac{1}{n!}\binom{n}{n} q^n x^{2n}$$

Ainsi, les coefficients $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ sont nuls, et les coefficients a_{n+k}, pour $k \in [\![0, n]\!]$ sont $a_{n+k} = \dfrac{1}{n!}\binom{n}{k} q^k(-p)^{n-k}$.

(b) D'après la première question, on sait que $P_n^{(k)}(0) = k!a_k$ donc $P_n^{(k)}(0) = 0$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$, et l'on a pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P_n^{(n+k)}(0) = (n+k)!a_{n+k} = \dfrac{(n+k)!}{n!}\binom{n}{k} q^k(-p)^{n-k}$.

Ainsi, $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

(c) Calculons, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$P_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{p}{q} - x\right)^n \left(q(\frac{p}{q} - x) - p\right)^n = \frac{1}{n!}\frac{(p-qx)^n}{q^n}(-qx)^n = \frac{1}{n!}(-1)^n(p-qx)^n x^n$$

On a donc tout simplement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = \dfrac{1}{n!}(qx-p)^n x^n = P_n(x)$.

En dérivant k fois cette relation par rapport à x, on a $(-1)^k P_n^{(k)}(\frac{p}{q} - x) = P_n^{(k)}(x)$.

On a donc pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$ avec $x = 0$, $P_n^{(k)}(\frac{p}{q}) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

(d) La fonction $f(x) = x(p - qx)$ est une fonction du second degré qui s'annule en 0 et $\frac{p}{q}$, son maximum est atteint en $x = \frac{p}{2q}$ et il vaut $\frac{p^2}{4q}$. On remarque que pour $x \in \left[0, \frac{p}{q}\right]$, $f(x) \geq 0$ et $|P_n(x)| = \frac{1}{n!}f^n(x)$ donc :

$$\max_{x\in\left[0,\frac{p}{q}\right]} |P_n(x)| = \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$$

4. On raisonne par l'absurde et l'on suppose que π est rationnel, donc que $\pi = \dfrac{p}{q}$ où $(p, q) \in {\mathbb{N}^*}^2$. On définit alors la suite P_n comme à la question précédente, et l'on s'intéresse à la suite d'intégrales :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin x \, \mathrm{dx}$$

Le résultat de la question 3(d) permet de prouver que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

En effet, on a en notant $M_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n$:

$$\forall x \in [0, \frac{p}{q}],\ |P_n(x)| \leq M_n,$$

$$\forall x \in [0, \frac{p}{q}],\ |P_n(x)\sin x| \leq M_n,$$

$$\forall x \in [0, \pi],\ -M_n \leq P_n(x)\sin x \leq M_n,$$

$$-M_n\pi \leq \int_0^\pi P_n(x)\sin x \leq M_n\pi.$$

Comme $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par encadrement que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme le degré de P_n est $2n$, on peut appliquer le résultat 2.(d) avec $N = n$ et l'on a :

$$J(P_n) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\left(P_n^{(2k)}(0) + P_n^{(2k)}\left(\frac{p}{q}\right)\right)$$

D'après les résultats 3.(b) et 3.(c), on a donc $I_n = J(P_n) \in \mathbb{Z}$ puisque tous les termes de la somme ci-dessus sont des entiers relatifs. En outre, P_n et sin sont de signe strictement positif sur l'intervalle $\left]0, \frac{p}{q}\right[$ donc $I_n > 0$ ce qui entraîne automatiquement $I_n \geq 1$. On obtient une contradiction avec $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Notre raisonnement par l'absurde nous permet de conclure que π n'est donc pas rationnel.

2 Une inéquation fonctionnelle, Suède 1962.

On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels :

$$|f(y) - f(x)| \leq 7(x-y)^2.$$

1. On considère deux nombres x et y réels tels que $x < y$. Si l'on coupe l'intervalle $[x, y]$, en $n \in \mathbb{N}^*$ parties de même largeur, selon un découpage $x_0 = x$, x_1, x_2,...,$x_n = y$, préciser pour tout entier k entre 0 et n l'expression de x_k en fonction de k, x et y :

$$x_k = x + \frac{k}{n}(y-x) = \frac{n-k}{n}x + \frac{k}{n}y.$$

2. On considère une fonction f qui est solution de notre problème. Avec les hypothèses et notations de la question précédente, on note pour tout k entier entre 1 et n : $a_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Que vaut la somme $S = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$?
   Cette somme est télescopique donc on obtient : $S = f(x_n) - f(x_0) = f(y) - f(x)$.
3. A l'aide des questions précédentes, montrer que si x et y sont des réels tels que $x < y$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{7(x-y)^2}{n}.$$

   On rappelle que l'on a :

$$f(y) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

   On en déduit par inégalité triangulaire :

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

   Or si $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$|a_k| = |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq 7(x_k - x_{k-1})^2 = 7\left(\frac{y-x}{n}\right)^2$$

   On en déduit :

$$|f(y) - f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} 7\left(\frac{y-x}{n}\right)^2$$

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{7(x-y)^2}{n}.$$

4. Avec les hypothèses de la question précédente, montrer que $|f(y) - f(x)| = 0$.
   Comme $\frac{7(x-y)^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on déduit de la question précédente que : $|f(y) - f(x)| \leq 0$ donc $|f(y) - f(x)| = 0$.
5. On a montré dans la question précédente qu'une fonction qui est solution du problème est constante, puisque pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x < y$, on a $f(x) = f(y)$. Réciproquement, toute fonction constante est une solution.