

Devoir surveillé

1 DS normal

Exercice 1. Bases

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. On admettra que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, 0, 1)$ et $c = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de E .
3. Montrer que $\{b, c\}$ est une base de F .
4. Montrer que $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
5. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?
6. Soit $u = (x, y, z)$, donner la matrice de coordonnées de u dans la base (a, b, c) .

Exercice 2. Une application linéaire sur un espace de matrices

Dans cet exercice, le corps de base est noté K , pouvant désigner indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $E = \mathcal{M}_2(K)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ deux éléments de E . On munit E de sa base canonique :

$$\mathcal{B} = \left(E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Soit enfin f l'endomorphisme de E défini par :

$$f : E \longrightarrow E$$

$$f : M \longmapsto AM - MB$$

1. Calculer la matrice $F \in \mathcal{M}_4(K)$ de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E .
2. Montrer que f est l'application linéaire nulle si et seulement si :

$$\exists \lambda \in K, A = B = \lambda I_2$$

Exercice 3. Etude d'un endomorphisme nilpotent à l'aide de changements de bases

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $e = (e_1, e_2, e_3)$ et l'on considère l'endomorphisme u dont la matrice dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer M^2 et vérifier que $M^3 = 0$.

- (b) Calculer $(I_3 - M)(I_3 + M + M^2)$, en déduire que $I_3 - M$ est inversible et préciser son inverse.
2. (a) Quelle est la dimension du noyau de u ? Quel est le rang de u ?
- (b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } u^2$, alors la famille $(x, u(x), u^2(x))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Que peut-on en déduire concernant la famille $(x, -u(x), u^2(x))$ quand $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } u^2$?
3. On pose $e'_1 = u^2(e_3)$, $e'_2 = -u(e_3)$ et $e'_3 = e_3$.
- (a) Montrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice de passage P de la base e à la base e' .
- (b) Calculer P^2 et en déduire P^{-1} .
- (c) Préciser la matrice M' de u dans la base e' .
- (d) On désigne par σ l'endomorphisme dont la matrice dans la base e est P . Indiquer à quel type particulier d'endomorphismes appartient σ ainsi que les sous-espaces qui lui sont associés.
- (e) Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de σ est :

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2 DSbis : Endomorphismes nilpotents

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension finie non nulle. On note $O_{\mathcal{L}(E)}$ l'endomorphisme nul de E et Id_E l'endomorphisme identité de E .

Pour $n \in \mathbb{N}$ et f un endomorphisme de E , on définit par récurrence l'endomorphisme f^n par :

$$f^0 = \text{Id}_E \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, f^{n+1} = f \circ f^n.$$

Un endomorphisme f de E est dit nilpotent si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = O_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Deux exemples.

- (a) Dans cette question, $E = \mathbb{K}^n$ et l'on note $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application définie par :

$$\phi : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

- i. Justifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- ii. Déterminer la dimension de l'image et du noyau de l'endomorphisme ϕ .
- iii. Montrer que ϕ est nilpotent.

- (b) Dans cette question, $E = \mathbb{K}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\Delta : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$ l'application définie par :

$$\Delta : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X).$$

- i. Justifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.
- ii. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en distinguant les cas selon que P est ou non un polynôme constant.
- iii. Déterminer le noyau, le rang puis l'image de Δ .
- iv. Montrer que Δ est un endomorphisme nilpotent.

2. Etude générale

- (a) Soient f et g des endomorphismes de E .

- i. Justifier que si f est nilpotent et que f et g commutent, alors $f \circ g$ est nilpotent.
- ii. Justifier que si $f \circ g$ est nilpotent, il en est de même de $g \circ f$.
- iii. On suppose que f est nilpotent, donc que $f^n = O_{\mathcal{L}(E)}$ pour un certain entier n non nul. Montrer que $\text{Id} - f$ est inversible d'inverse :

$$\text{Id} + f + f^2 + \dots + f^{n-1}.$$

- (b) Soit f un endomorphisme nilpotent de E .

Justifier l'existence d'un plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = O_{\mathcal{L}(E)}$.

Cet entier est appelé l'indice de nilpotence de f , on le notera $\nu(f)$.

- (c) Soit f un endomorphisme nilpotent de E .

L'objectif de cette question est de prouver que $\nu(f) \leq \dim E$.

A cette fin, on note pour tout $p \in \mathbb{N}$: $N_p = \text{Ker } f^p$.

- i. Déterminer $N_{\nu(f)}$.
- ii. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $N_p \subset N_{p+1}$.

- iii. Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dim N_p = \dim N_{p+1}$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $N_p = N_{p+q}$.
 - iv. Conclure.
3. Commutant d'un endomorphisme nilpotent maximal.
- Soit f un endomorphisme nilpotent de E tel que $\nu(f) = \dim E$.
On note n cet entier égal à la dimension de E et à l'indice de nilpotence de f , et $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E commutant avec f .
- (a) Montrer que $C(f)$ est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$.
 - (b) Soit $g \in C(f)$.
 - i. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$.
 - ii. Montrer que la famille de vecteurs $B = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
 - iii. On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ les coordonnées de $g(x_0)$ dans la base B .
Exprimer, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $g(f^k(x_0))$ comme combinaison linéaire des vecteurs de B .
 - iv. En déduire que $g = a_0 Id + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}$.
 - (c) Conclure que $C(f) = \text{Vect}(Id, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.
 - (d) Déterminer la dimension de $C(f)$.