

Problème du concours blanc 2024 et son corrigé

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est à dire qui vérifient la relation $M^T M = M M^T$ (1).

Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire que M vérifie la relation (1).

Première partie

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On notera en particulier : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1).
2. Calculer A^2 . En déduire que pour tout entier naturel non nul n , A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.
Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est A .
4. Préciser les valeurs de $u(\vec{i})$ et $u(\vec{j})$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble de ses vecteurs invariants.
Dans la suite, on notera $U = A + I$.
5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_n \in \mathbb{R}, U^n = \alpha_n U$.
En déduire que toutes ses puissances U^n , $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1).
On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient (1).
6. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.
En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a , b , c et d pour que M appartienne à E_2 . On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2 .
8. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels dont on donnera pour chacun une base.
9. Etant données M et N deux matrices de E_2 , a-t-on nécessairement $MN \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

Deuxième partie

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $B' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h(\vec{j}) = \vec{i}$ et $h(\vec{k}) = \vec{j}$ ainsi que $S = \text{Mat}_{B'}(h)$.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_3 .

10. Représenter la matrice S .
11. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3 .
12. Montrer que pour tous réels a , b et c , la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3 .
13. En déduire que E_3 contient un sous-espace vectoriel de dimension 3 constitué de matrices du type décrit à la question précédente. On notera F ce sous-espace.
14. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

Troisième partie

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $B'' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque, et on appelle u

l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $Mat_{B''}(u) = B$.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_4 .

15. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.

Dans toute la suite, on pose $a = -1$.

16. Déterminer une base de $\text{Ker } (u)$ et de $\text{Im } (u)$.

17. Calculer $u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$. Que remarque-t-on ?

18. Calculer $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Commenter le résultat obtenu.

19. On note $C = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$ et on admet sans démonstration que C est une base de $\mathbb{R}^4$.

Déduire des questions précédentes $Mat_C(u)$.

En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale. On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1} .

20. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et B^2 .

Corrigé

Première partie

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On notera en particulier : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On calcule :

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^T C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C C^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc A et C vérifient la relation (1).

2. $A^2 = I_2$, donc les puissances de A sont faciles à décrire : on démontre aisément par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $A^{2n} = I_2$ et $A^{2n+1} = A$. Ainsi, puisque I_2 et A vérifient (1), c'est aussi le cas de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. A est inversible puisque $A^2 = I_2$, et son inverse est $A^{-1} = A$.

Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est A .

4. On a $u(\vec{i}) = \vec{j}$ et $u(\vec{j}) = \vec{i}$.

$u \circ u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice dans la base canonique $A^2 = I_2$ donc $u \circ u = Id_{\mathbb{R}^2}$ et u est une symétrie. L'ensemble de ses vecteurs invariants est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}.$$

Il s'agit donc du sous espace de dimension 1 engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans la suite, on notera $U = A + I$.

5. On vérifie par le calcul que $U^T U = U U^T = U^2 = 2U$, donc la matrice U vérifie la relation (1).

Montrons par récurrence (forte) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U^n = 2^{n-1}U$.

La relation est vérifiée aux rangs $n = 1$ et $n = 2$.

Supposons que $n \geq 2$, et que la relation est vérifiée au rang n . Comme $U^2 = 2U$, on a :

$$U^{n+1} = U^{n-1}U^2 = U^{n-1}2U = 2U^n = 2^n U.$$

La relation est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc $(U^n)^T U^n = 2^{n-1}U^T 2^{n-1}U = 2^{2n-2}U^T U = 2^{2n-2}U U^T = 2^{n-1}U 2^{n-1}U^T = U^n (U^n)^T$, et U^n vérifie (1) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient (1).

6. Calculons les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée :

$(A + C)(A + C)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $(A + C)^T (A + C) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel puisque $A \in E_2$, $C \in E_2$ et $A + C \notin E_2$.

7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$M M^T = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

et en faisant le produit dans l'autre sens :

$$M^T M = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix},$$

donc $M \in E_2$ si et seulement si le système d'équations suivant est vérifié :

$$\begin{cases} ab + cd = ac + bd \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \\ c^2 + d^2 = b^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b - c)(b + c) = 0 \\ (b - c)(a - d) = 0 \end{cases}$$

Ceci est vérifié dans deux cas et deux cas seulement : si $b = c$, ou bien si $b = -c$ et que $a = d$.

Les deux formes possibles des matrices de E_2 sont $\begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}$.

8. E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels, admettant respectivement pour bases

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

9. Etant données M et N deux matrices de E_2 , $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple,

on constate que $MN = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin E_2$ donc le produit de deux matrices de E_2 n'est pas nécessairement dans E_2 .

Deuxième partie

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $B' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h(\vec{j}) = \vec{i}$ et $h(\vec{k}) = \vec{j}$ ainsi que $S = \text{Mat}_{B'}(h)$.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_3 .

10. Représentons la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Calculons $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $S^T S = S S^T = I_3$ et $(S^2)^T S^2 = S^2 (S^2)^T = I_3$ donc S et S^2 sont dans E_3 .

12. Calculons, pour trois réels a, b et c , avec $R = aI_3 + bS + cS^2$:

$$R^T R = (aI_3 + bS^T + c(S^2)^T)(aI_3 + bS + cS^2)$$

$$R^T R = a^2 I_3 + abS + acS^2 + baS^T + b^2 I_3 + bcS + ca(S^T)^2 + cbS^T + c^2 I_3$$

$$R^T R = (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ab + bc)(S + S^T) + ac(S^2 + (S^T)^2)$$

$$RR^T = (aI_3 + bS + cS^2)(aI_3 + bS^T + c(S^T)^2)$$

$$RR^T = a^2 I_3 + abS^T + ac(S^T)^2 + baS + b^2 I_3 + bcS^T + caS^2 + cbS + c^2 I_3$$

$$RR^T = (a^2 + b^2 + c^2)I_3 + (ab + bc)(S + S^T) + ac(S^2 + (S^T)^2)$$

On a donc : $\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, aI_3 + bS + cS^2 \in E_3$.

13. E_3 contient donc $F = \text{Vect}(I_3, S, S^2)$. Les matrices I_3, S et S^2 forment une famille libre, donc ce sous-espace est de dimension 3.

14. Montrer que F est stable par multiplication matricielle :

Soient $R_1 = a_1 I_3 + b_1 S + c_1 S^2$ et $R_2 = a_2 I_3 + b_2 S + c_2 S^2$ deux éléments de F , on a alors

$$R_1 R_2 = a_1 a_2 I_3 + a_1 b_2 S + a_1 c_2 S^2 + b_1 a_2 S + b_1 b_2 S^2 + b_1 c_2 S^3 + c_1 a_2 S^2 + c_1 b_2 S^3 + c_1 c_2 S^4$$

Or $S^3 = -I_3$ donc $S^4 = -S$ et l'on peut simplifier :

$$R_1 R_2 = (a_1 a_2 - b_1 c_2 - b_2 c_1) I_3 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 - c_1 c_2) S + (a_1 c_2 + b_1 b_2 + c_1 a_2) S^2$$

Donc $R_1 R_2 \in F$ et F est bien stable par multiplication matricielle.

Troisième partie

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $B'' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque, et on appelle u

l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $Mat_{B''}(u) = B$.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (vérifiant la relation (1)) est noté E_4 .

15. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.

Calculons :

$$B^T B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B B^T = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+a^2 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ligne 1 colonne 2 du résultat, on voit qu'une condition nécessaire pour avoir $B \in E_4$ est que $a+1 = 0$ donc $a = -1$. Réciproquement, si $a = -1$, on observe que $B \in E_4$. Dans toute la suite, on pose $a = -1$.

16. Calculons $\text{Ker}(u) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} x - y + z + t = 0 \\ -x + t = 0 \\ x - t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{array} \right\}$

A l'aide du pivot de Gauss, on obtient un système équivalent avec trois équations $x = 0$, $y = z$ et $t = 0$.

Ainsi, $\text{Ker}(u) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

D'après le théorème du rang, $\text{Im}(u)$ est donc de dimension 3.

Or $\text{Im}(u)$ est l'espace engendré par les colonnes de B dans $\mathbb{R}^4$. Comme la troisième colonne est l'opposée de la deuxième, $\text{Im}(u)$ est engendré par la famille des colonnes n°1, 2 et 4 de

$$B : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Cette famille est une base de $\text{Im}(u)$ puisqu'elle est génératrice de cardinal 3.

17. Calculons $u(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4) = -2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_4$. En notant $v = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4$, on a donc $u(v) = -2v$.

18. Calculons $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Pour ces deux vecteurs, l'image par u est égale à leur double.

19. On note $C = (\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 - \vec{e}_4, \vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_4)$ et on admet sans démonstration que C est une base de $\mathbb{R}^4$.

On déduit des questions précédentes $Mat_C(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En notant $P = Mat_{B''}(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base B'' à la base C ,

on a $B = P Mat_C(u) P^{-1}$, où $Mat_C(u)$ est une matrice diagonale.

20. On prouve par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, B^n = P Mat_C(u)^n P^{-1}$.

Ceci est vrai au rang 1.

Supposons que c'est vrai au rang n , on a alors

$$B^{n+1} = B^n B = P Mat_C(u)^n P^{-1} P Mat_C(u) P^{-1} = P Mat_C(u)^n Mat_C(u) P^{-1} = P Mat_C(u)^{n+1} P^{-1}$$

et la propriété est héréditaire.

On remarque enfin que $\forall n \in \mathbb{N}^*, Mat_C(u)^{n+2} = 4 Mat_C(u)^n$ et l'on en déduit aisément que $B^{n+2} = 4B^n$.

Ainsi, on montre par récurrence sur l'entier naturel p que $B^{2p} = 4^{p-1} B^2$ et $B^{2p+1} = 4^p B$.