

Programme des colles du 01/12 au 05/12

1. Complexes

- Racines n -ièmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

- Caractérisation des racines n -ièmes de l'unité autres que 1 par :

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$$

- Fonction exponentielle de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , propriété relativement à l'image d'une somme.
- Propriété concernant l'égalité d'exponentielles : $\forall z, w \in \mathbb{C}, e^z = e^w \Leftrightarrow z - w \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
- Angles, alignement et orthogonalité en utilisant les affixes complexes.
- Transformations géométriques du plan complexe : translations, homothéties et rotations.
- Primitives de $f(x) = \cos(bx)e^{ax}$ ou $g(x) = \sin(bx)e^{ax}$.

2. Primitives et intégrales

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue à l'aide des primitives.
- Primitives usuelles : puissances, exponentielles, trigonométriques, $\ln(x)$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{1+x^2}$
- Propriétés : linéarité, Chasles, croissance.
- Formule d'intégration par parties pour u et v de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$: $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$.
- Formule de changement de variable pour $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\phi : [a, b] \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 :

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t) \, dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) \, dx.$$

- Primitives de $\frac{1}{P}$ où P est une fonction polynomiale réelle du second degré.

3. Equations différentielles

- Ordre 1

- **Résolution de l'équation homogène d'ordre 1**, $y' + a(x)y = 0$, où $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle I : connaître précisément la propriété qui décrit l'ensemble des solutions à l'aide d'une primitive A de a et savoir la prouver.
- Solutions de l'équation avec second membre à l'aide d'une solution particulière.
- Méthode de variation de la constante pour déterminer une solution par intégration.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.
- Ordre 2 : équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(x)$
- Description des solutions de l'équation homogène : cas complexe, cas réel.
- Description des solutions de l'équation avec second membre à l'aide d'une solution particulière de l'équation.
- Solution particulière dans le cas d'un second membre exponentiel ou trigonométrique.

4. Logique et raisonnement

- Définition d'une proposition logique : énoncé qui est soit vrai, soit faux.
- Connecteurs logiques : et, ou, \Rightarrow , \Leftrightarrow .
- Quantificateurs et prédictats.
- Négation d'assertions avec des quantificateurs, "et", "ou", \Rightarrow .
- **Raisonnement par contraposée** : pour $n \in \mathbb{Z}$, on a n^2 pair $\Rightarrow n$ pair puis par l'absurde : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Récurrences.
- **Raisonnement par analyse-synthèse** : toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit d'une seule manière comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.