

Devoir à la maison**Intégrales de Wallis**

Pour tout entier naturel n , on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1, \text{ on linéarise ensuite } \cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2} \text{ pour calculer :}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) + 1}{2} \, dt$$

$$I_2 = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{2}t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{4}$$

2. Prouver que l'on a pour tout n :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Indication : on pourra intégrer par parties, avec $\cos^n t = \cos t \cos^{n-1} t$.

Suivant l'indication, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t (-\sin t)(n+1) \cos^n t \, dt \\ I_{n+2} &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ I_{n+2} &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt \\ I_{n+2} &= (n+1)(I_n - I_{n+2}) \\ (n+2)I_{n+2} &= (n+1)I_n \end{aligned}$$

3. A l'aide des deux questions précédentes, prouver que l'on a pour tout n :

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}.$$

D'après les valeurs de I_0 et I_1 , on vérifie immédiatement que la propriété est vraie pour $n = 0$.

Prouvons alors que si c'est vrai au rang n , c'est vrai au rang $n+1$. On suppose donc que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$, or on sait d'après la question précédente que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$, i.e. $I_n = \frac{n+2}{n+1}I_{n+2}$. On obtient donc :

$$(n+1)I_{n+1}\frac{n+2}{n+1}I_{n+2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Prouver également que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \leq I_n$ et

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$. On en déduit, donc si $n \in \mathbb{N}$, que $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$. Par croissance et positivité de l'intégrale entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on en déduit $0 < I_{n+1} \leq I_n$. L'inégalité de droite est donc prouvée, on peut en effet diviser l'inégalité par I_n puisque $I_n > 0$ par positivité de l'intégrale. On a alors aussi que $I_{n+2} \leq I_{n+1}$ pour les mêmes raisons. Grâce à la question 2), on en déduit : $\frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1}$, et il ne reste plus qu'à diviser les deux membres de cette dernière inégalité pour obtenir que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

5. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(n+1)\pi}{(n+2)2} \leq (n+1)I_{n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

et en déduire la limite de $\sqrt{n}I_n$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Pour obtenir l'inégalité, on multiplie simplement les trois membres de l'inégalité de la question précédente par $\frac{\pi}{2}$, ce qui revient au même d'après la question d'avant que de multiplier par $(n+1)I_{n+1}I_n$, et c'est donc par cela qu'on multiplie le membre du milieu.

Elle est vraie pour tout entier, donc si $n \in \mathbb{N}^*$, elle est aussi vraie au rang $n-1$ et porte sur des nombres positifs d'où :

$$\frac{n\pi}{(n+1)2} \leq nI_n^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{\frac{n\pi}{(n+1)2}} \leq \sqrt{n}I_n \leq \sqrt{\frac{\pi(n+1)}{2n}}.$$

On en déduit aisément, par encadrement, que $\sqrt{n}I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

6. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$. On souhaite donc prouver que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $0 \leq x - \ln(1+x)$. Étudions donc sur $] -1, +\infty[$ la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f(x) = x - \ln(1+x).$$

Cette fonction est dérivable sur son ensemble de définition, avec :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{1+x}.$$

Ainsi, la dérivée est négative sur $] -1, 0[$ et positive sur $] 0, +\infty[$, on en déduit que f atteint son minimum pour $x = 0$, et on constate que ce minimum est nul. Donc l'inégalité que l'on souhaitait vérifier est bien prouvée.

Prouver alors que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall u \in [-n, +\infty[, \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u.$$

Si $u \in] -n, +\infty[$, $\frac{u}{n} \in] -1, +\infty[$, et d'après l'inégalité précédente appliquée à $x = \frac{u}{n}$, on a :

$$\forall u \in] -n, +\infty[, \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \leq \frac{u}{n},$$

$$\forall u \in] -n, +\infty[, n \ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \leq u.$$

La fonction exponentielle étant croissante, il ne reste plus qu'à écrire que l'exponentielle du premier est inférieure ou égale à celle du deuxième nombre de notre inégalité pour conclure si $u > -n$. Si $u = -n$, l'inégalité est encore vraie, elle signifie qu'une exponentielle est positive.

7. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

Si $t \in [0, \sqrt{n}]$, on a $-t^2 \in [-n, 0]$ donc on peut appliquer l'inégalité précédente à $u = -t^2$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}.$$

On peut aussi appliquer l'inégalité précédente à $u = t^2$:

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{t^2}.$$

On en déduit par décroissance de l'inverse sur \mathbb{R}_+^* :

$$e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

8. On note dorénavant :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt, \quad K_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt, \quad L_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} dt.$$

Grâce aux changements de variables $t = \sqrt{n} \sin u$ et $t = \sqrt{n} \tan u$ respectivement, exprimer J_n et majorer L_n à l'aide des termes de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Pour que le premier changement de variable convienne, on peut intégrer pour u variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ de sorte que $t = \sqrt{n} \sin u$ varie de 0 à \sqrt{n} . Puisque $t = \sqrt{n} \sin u$, on a $dt = \sqrt{n} \cos u du$:

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{n \sin^2 u}{n}\right)^n \sqrt{n} \cos u du, \\ J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u \sqrt{n} \cos u du, \\ J_n &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} u du. \end{aligned}$$

On a donc $J_n = \sqrt{n} I_{2n+1}$, et le deuxième changement de variable proposé, $t = \sqrt{n} \tan u$, convient si l'on intègre entre $u = 0$ et $u = \text{Arctan } (1) = \frac{\pi}{4}$ avec $dt = \sqrt{n} \frac{1}{\cos^2 u} du$ donc :

$$\begin{aligned} L_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(1 + \frac{n \tan^2 u}{n}\right)^n} \sqrt{n} \frac{1}{\cos^2 u} du, \\ L_n &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u}\right)^n} \frac{1}{\cos^2 u} du, \\ L_n &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 u)^n \frac{1}{\cos^2 u} du, \\ L_n &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} u du. \end{aligned}$$

On en déduit $L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$.

9. Déterminer la limite de la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$. La croissance de l'intégrale, combinée avec l'inégalité prouvée à la question 7), nous assure que $J_n \leq K_n \leq L_n$.

Enfin, on a :

$$J_n = \sqrt{n} I_{2n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \sqrt{2n+1} I_{2n+1} \text{ et } L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n-2}} \sqrt{2n-2} I_{2n-2},$$

$$J_n = \sqrt{n} I_{2n+1} = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \sqrt{2n+1} I_{2n+1} \text{ et } L_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2} = \sqrt{\frac{n}{2n-2}} \sqrt{2n-2} I_{2n-2}.$$

On en déduit aisément que la limite commune de J_n et L_n quand n tend vers $+\infty$ est

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ c'est donc aussi la limite de } K_n \text{ par encadrement.}$$

Équations différentielles

1. Décrire l'ensemble des solutions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) \sin t = 2 \sin t$$

On remarque tout d'abord qu'une solution particulière de l'équation est donnée par la fonction constante $y_p = 2$.

Étudions alors l'équation homogène associée :

$$(E_h) \quad y'(t) + y(t) \sin t = 0$$

Une primitive de $a(t) = \sin t$ est $A(t) = -\cos t$ donc l'ensemble des solutions réelles de E_h est $\{y : t \mapsto Ce^{\cos t} \mid C \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est :

$$\mathcal{S} = \{y : t \mapsto Ce^{\cos t} + 2 \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

2. On s'intéresse dans cette question aux solutions réelles de l'équation :

$$(E) \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t + \cos t$$

- (a) L'équation homogène associée est $(E_h) \quad y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$, d'équation caractéristique $(C) \quad r^2 - 3r + 2 = 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont $r = 1$ et $r = 2$, donc l'ensemble des solutions de (E_h) est $\{y : t \mapsto Ae^t + Be^{2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$.

- (b) Déterminer une solution particulière $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la première équation, et $y_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la deuxième :

$$y_1''(t) - 3y_1'(t) + 2y_1(t) = e^t \tag{1}$$

$$y_2''(t) - 3y_2'(t) + 2y_2(t) = \cos t \tag{2}$$

Pour y_1 , comme $e^t = e^{1t}$ et que 1 est racine simple de (C) , on cherche y_1 sous la forme $y_1(t) = \alpha te^t$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. On calcule alors $y_1'(t) = \alpha e^t + \alpha te^t$, $y_1''(t) = 2\alpha e^t + \alpha te^t$ donc $y_1''(t) - 3y_1'(t) + 2y_1(t) = -\alpha e^t$. Il suffit de choisir $\alpha = -1$, et $y_1(t) = -te^t$ convient.

Pour y_2 , on cherche une solution complexe $y_{2\mathbb{C}}$ de l'équation $y_{2\mathbb{C}}''(t) - 3y_{2\mathbb{C}}'(t) + 2y_{2\mathbb{C}}(t) = e^{it}$. Puisque i n'est pas racine de (C) , on cherche sous la forme $y_{2\mathbb{C}} = \lambda e^{it}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. Un calcul simple donne alors $y_{2\mathbb{C}}''(t) - 3y_{2\mathbb{C}}'(t) + 2y_{2\mathbb{C}}(t) = (1 - 3i)\lambda e^{it}$. On choisit $\lambda = \frac{1}{1 - 3i} = \frac{1 + 3i}{10}$. Alors la fonction $y_2(t) = \operatorname{Re}(y_{2\mathbb{C}}(t)) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + 3i}{10} e^{it}\right) = \frac{\cos t - 3 \sin t}{10}$ convient.

- (c) D'après le principe de superposition, une solution particulière de (E) est :

$$y_p(t) = \frac{\cos t - 3 \sin t}{10} - te^t$$

On déduit alors de l'étude précédente l'ensemble des solutions de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : t \mapsto \frac{\cos t - 3 \sin t}{10} - te^t + Ae^t + Be^{2t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Pour préciser la solution y vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$, on calcule $y(0) = \frac{1}{10} + A + B$ et $y'(0) = -\frac{3}{10} - 1 + A + 2B$. Les constantes A et B sont alors solutions du système d'équations $\begin{cases} A + B = -\frac{1}{10} \\ A + 2B = -\frac{13}{10} \end{cases}$, on trouve enfin $B = \frac{7}{5}$ et $A = -\frac{3}{2}$.