Corrigé du devoir à la maison

1. On s'intéresse dans cette première partie aux fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$(R)\, \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

   (a) On suppose dans cette question que $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ vérifie (R), et l'on note $a = f(1)$.

      i. Prouver que $f(0) = 0$.
      Pour $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

      ii. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Si $n \in \mathbb{N}$ montrer que $f(nr) = nf(r)$.
      On le démontre par récurrence : pour $n = 0$, c'est vrai puisque $f(0) = 0$.
      On suppose donc que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, et on en déduit :

$$f((n+1)r) = f(nr + r)$$
$$f((n+1)r) = f(nr) + f(r)$$
$$f((n+1)r) = nf(r) + f(r)$$
$$f((n+1)r) = (n+1)f(r).$$

      iii. Si k est un entier relatif, montrer que $f(kr) = kf(r)$.
      D'après la question précédente, on a si $k \in \mathbb{N}$: $f(kr) = kf(r)$.
      Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, on peut appliquer le résultat à $(-k) \in \mathbb{N}$: $f(-kr) = -kf(r)$.
      Or on sait que :

$$f(-kr) + f(kr) = f(-kr + kr)$$
$$-kf(r) + f(kr) = f(0)$$
$$f(kr) = kf(r)$$

      iv. Si r est un nombre rationnel, montrer que l'on a $f(r) = ar$.
      Soit $r = \frac{p}{q}$ où $p \in Z$ et $q \in \mathbb{N}^*$ un nombre rationnel, on a donc :

$$f\left(q\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$$
$$f(p) = qf(r)$$
$$pf(1) = qf(r)$$
$$f(r) = \frac{p}{q}f(1)$$
$$f(r) = ar$$

   (b) Montrer que les fonctions f qui vérifient (R) sont celles telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = ar.$$

   On vient de voir que si f est une solution du problème, f est nécessairement une fonction linéaire, c'est à dire que l'on a $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = ax$.
   Réciproquement, on vérifie aisément qu'une telle fonction vérifie, si x et y sont des réels :

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

   Les fonctions solutions sont donc toutes celles de cette forme.

2. Dans cette deuxième partie de l'exercice, on s'intéresse aux fonctions $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$(S)\, \forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2,\ g(x + y) = g(x)g(y).$$

   (a) Quelles sont les fonctions constantes qui sont solution du problème ?
   Une fonction constante en la valeur $C \in \mathbb{R}$ est solution si et seulement si $C = C^2$, donc les fonctions constantes qui sont solution sont la fonction nulle et la fonction constante égale à 1.

   (b) On considère dans cette question une fonction $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, qui n'est pas la fonction nulle, et qui vérifie (S).

      i. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) \neq 0$.
      Par l'absurde, supposons qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $g(r) = 0$. On a alors, si $t \in \mathbb{Q}$, en appliquant l'équation fonctionnelle avec $x = t - r$ et $y = r$:

$$g(t - r + r) = g(t - r)g(r)$$

$$g(t) = g(t - r) \times 0$$

$$g(t) = 0.$$

      La fonction g est donc la fonction nulle, ce qui fournit la contradiction désirée.

      ii. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) > 0$.
      Soit $r \in \mathbb{Q}$, on a donc $\frac{r}{2} \in \mathbb{Q}$ et $g(r) = g\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = g\left(\frac{r}{2}\right)^2 \geq 0$. D'après la question précédente, on a donc $g(r) > 0$ puisque $g(r) \neq 0$.

      iii. Montrer que la fonction f définie pour tout $r \in \mathbb{Q}$ par $f(r) = \ln(g(r))$ vérifie (R).
      Soient x et y dans $\mathbb{Q}$, on a :

$$f(x + y) = \ln(g(x + y)) = \ln(g(x)g(y)) = \ln(g(x)) + \ln(g(y)) = f(x) + f(y).$$

      f vérifie donc (R).

      iv. Prouver qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) = e^{ar}.$$

      D'après la question précédente et la première partie de l'exercice, on a si $r \in \mathbb{Q}$:

$$f(r) = ar$$

$$\ln(g(r)) = ar$$

$$g(r) = e^{ar}$$

      avec $a = f(1) = \ln(g(1))$.

   (c) Conclure.
   L'analyse du problème nous a montré qu'une solution du problème est nécessairement la fonction nulle ou une fonction du type $g(r) = e^{ar}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Réciproquement, ces fonctions sont bien solutions du problème donc toutes les solutions sont de cette forme.