
Devoir à la maison

1. On s'intéresse dans cette première partie aux fonctions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$(R) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

- (a) On suppose dans cette première partie que f est une solution du problème, et l'on note $a = f(1)$.
- i. Déterminer la valeur $f(0)$.
 - ii. Si n est un entier naturel et $r \in \mathbb{Q}$, montrer que $f(nr) = nf(r)$.
 - iii. Si k est un entier relatif et $r \in \mathbb{Q}$, montrer que $f(kr) = kf(r)$.
 - iv. Si r est un nombre rationnel, ce qui signifie que l'on a $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$, montrer que l'on a $f(r) = ar$.
- (b) Conclure en décrivant toutes les fonctions qui sont solution de l'équation fonctionnelle.
2. Dans cette deuxième partie de l'exercice, on s'intéresse aux fonctions $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$(S) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, g(x + y) = g(x)g(y).$$

- (a) Quelles sont les fonctions constantes qui sont solution du problème ?
- (b) On considère dans cette question une fonction $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$, qui n'est pas la fonction nulle, et qui vérifie (S).
- i. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, g(r) \neq 0$.
 - ii. Montrer que $\forall r \in \mathbb{Q}, g(r) > 0$.
 - iii. Montrer que la fonction f définie pour tout $r \in \mathbb{Q}$ par $f(r) = \ln(g(r))$ vérifie (R).
 - iv. Prouver qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall r \in \mathbb{Q}, g(r) = e^{ar}.$$

- (c) Conclure.