Devoir surveillé

Exercice 1. *Échauffement*

On note $\omega = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer ω^2, ainsi que son module et un argument.
2. Déterminer alors la forme trigonométrique de ω.
3. Calculer la forme algébrique de ω^8.

Exercice 2. *Sommes géométriques*

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta},\ R_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta),\ I_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Calculer S_n puis en déduire une expression simple de R_n et I_n.

Exercice 3. *Cosinus et Sinus de* $\frac{\pi}{12}$

On note $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Calculer $z_1\overline{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.
3. En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 4. *Equations dans* $\mathbb{C}$

1. Déterminer l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :
$$|z+i| = |z-i|$$
2. Déterminer les racines carrées de -3+4i, puis résoudre l'équation :
$$z^2 - 3z + 3 - i = 0.$$
3. Rappeler la définition des racines n-ièmes de l'unité pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la description de leur ensemble vue en cours :
$$\mathbb{U}_n = \{\cdots | k \in [\![\cdots]\!]\}$$
4. Préciser l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et les représenter dans le plan.
   Donner la forme polaire et l'écriture algébrique de chacune d'entre elles.
5. Dans cette quatrième partie de l'exercice, on étudie les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation :
$$(E)\ z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$
   (a) Décrire sous forme polaire l'ensemble des solutions de cette équation, en justifiant avec précision.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z :
$$(E')\ Z^2 + Z - 1 = 0.$$
   (c) Montrer que $z \in \mathbb{C}^*$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $Z = z + \dfrac{1}{z}$ est solution de (E').
   (d) Décrire sous forme algébrique l'ensemble des solutions de (E) et préciser la forme polaire de chacune de ces solutions.