Corrigé du devoir surveillé

Exercice 1. *Echauffement*

On note $\omega = \sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Calculer ω^2, ainsi que son module et un argument.

$$\omega^2 = \left(\sqrt{2-\sqrt{2}} - i\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\omega^2 = 2-\sqrt{2} - (2+\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\omega^2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$\omega^2 = -2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

$$\omega^2 = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\omega^2 = 4e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

   ω^2 est de module 4 et $-\frac{3\pi}{4}$ en est un argument.

2. Déterminer alors la forme trigonométrique de ω.
   Les deux racines carrées du nombre ω^2 sont $2e^{-i\frac{3\pi}{8}}$ et $-2e^{-i\frac{3\pi}{8}}$. On en déduit que $\omega = 2e^{-i\frac{3\pi}{8}}$ puisque sa partie réelle est positive.

3. Calculer ω^8.

$$\omega^8 = 2^8 e^{-8i\frac{3\pi}{8}}$$

$$\omega^8 = 256e^{-3i\pi}$$

$$\omega^8 = -256$$

Exercice 2. *Sommes géométriques*

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, on note pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta},\ R_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta),\ I_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Calculer S_n puis en déduire une expression simple de R_n et I_n. Puisque $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$ et on peut appliquer la formule des sommes géométriques :

$$S_n = \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}}$$

$$S_n = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

$$S_n = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$S_n = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$S_n = \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$S_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

On remarque que $S_n = R_n + iI_n$, et l'on obtient donc par identification de la partie réelle et imaginaire :

$$R_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \; ; \; I_n = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Exercice 3. *Cosinus et Sinus de* $\frac{\pi}{12}$

On note $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Mettre z_1 et z_2 sous forme algébrique. $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$.
2. Calculer $z_1\overline{z_2}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

$$z_1\overline{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2},$$
$$z_1\overline{z_2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}.$$

$$z_1\overline{z_2} = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$
$$z_1\overline{z_2} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)},$$
$$z_1\overline{z_2} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

3. En déduire les valeurs du cosinus et du sinus de $\dfrac{\pi}{12}$.

   On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 4. *Equations dans* $\mathbb{C}$

1. Déterminer l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que :

$$|z+i| = |z-i|$$

On a en puisqu'un module est toujours positif :

$$|z-i| = |z+i| \iff |z-i|^2 = |z+i|^2$$
$$|z-i| = |z+i| \iff (z-i)(\bar{z}+i) = (z+i)(\bar{z}-i)$$
$$|z-i| = |z+i| \iff z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 = z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1$$
$$|z-i| = |z+i| \iff 2i(z-\bar{z}) = 0$$
$$|z-i| = |z+i| \iff z - \bar{z} = 0$$
$$|z-i| = |z+i| \iff z \in \mathbb{R}$$

L'ensemble de nombre cherché ici est donc $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les racines carrées de $-3+4i$.

   On cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(a+ib)^2=-3+4i$, c'est à dire vérifiant :

$$\begin{cases} (1) & a^2-b^2 = -3 \\ (2) & 2ab = 4 \end{cases}$$

   Avec la condition que $|a+ib|^2=\sqrt{3^2+4^2}$, i.e. (3) $a^2+b^2=5$, on obtient en ajoutant ou soustrayant (1) et (3) : $a^2=1$ et $b^2=4$. Puisque a et b sont de même signe d'après (3), on a donc : $1+2i$ et $-1-2i$ sont les deux racines carrées de $-3+4i$.

   Résolvons maintenant :

$$z^2-3z+3-i=0.$$

   On calcule le discriminant $\Delta=-3+4i$ dont une racine carrée est $\delta=1+2i$. Ainsi, les deux solutions de l'équation sont :

$$z_1=\frac{3-(1+2i)}{2}=1-i \text{ et } z_2=\frac{3+(1+2i)}{2}=2+i.$$

3. Rappeler la définition des racines n-ièmes de l'unité pour $n\in\mathbb{N}^*$ et la description de leur ensemble vue en cours :

$$\mathbb{U}_n=\{\cdots|k\in[\![\cdots]\!]\}$$

4. Préciser l'ensemble des solutions de l'équation $z^6=1$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ et les représenter dans le plan. Cet ensemble est :

$$\mathbb{U}_6=\left\{e^{\frac{ik\pi}{3}}\mid k\in[\![0,5]\!]\right\}$$

$$\mathbb{U}_6=\left\{e^{i0},e^{\frac{i\pi}{3}},e^{\frac{i2\pi}{3}},e^{i\pi},e^{\frac{i4\pi}{3}},e^{\frac{i5\pi}{3}}\right\}$$

   Et voici leurs formes algébriques dans le même ordre :

$$\mathbb{U}_6=\{1,\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},-1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

   .

5. Dans cette quatrième partie de l'exercice, on étudie les solutions $z\in\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(E)\ z^4+z^3+z^2+z+1=0.$$

   (a) Décrire sous forme polaire l'ensemble des solutions de cette équation, en justifiant avec précision.

   Pour tout $z\neq 1$, $z^4+z^3+z^2+z+1=\dfrac{z^5-1}{z-1}$ donc les solutions de l'équation sont exactement les racines 5-ièmes de l'unité à l'exception de 1. Il s'agit de $e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $e^{\frac{4i\pi}{5}}$, $e^{\frac{6i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{8i\pi}{5}}$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue Z :

$$(E')\ Z^2+Z-1=0.$$

   On calcule le discriminant $\Delta=5$, l'équation a donc deux solutions $Z_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

   (c) Si $z\in\mathbb{C}^*$, $Z=z+\dfrac{1}{z}$ est solution de (E') équivaut à :

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}-1=0$$

$$z^2+\frac{1}{z^2}+2+z+\frac{1}{z}-1=0$$

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$$
$$\frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}=0$$

Ceci est bien équivalent, si $z\in\mathbb{C}^*$, à z solution de (E).

(d) Décrire sous forme algébrique l'ensemble des solutions de (E) et préciser la forme polaire de chacune de ces solutions.

D'après la question précédente, puisque 0 n'est pas solution de (E), les solutions de (E) sont les $z\in\mathbb{C}^*$ tels que :

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\Leftrightarrow z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1=0 \text{ ou } z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1=0$$

On calcule les deux discriminants $\Delta_1=\frac{\sqrt{5}-5}{2}$ et $\Delta_2=\frac{-\sqrt{5}-5}{2}$ qui sont strictement négatifs. On en déduit les 4 solutions des deux équations :

$$z=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{\frac{-\sqrt{5}+5}{2}}}{2} \text{ ou } z=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{\frac{-\sqrt{5}+5}{2}}}{2}$$
$$\text{ou } z=-\frac{1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}{2} \text{ ou } z=-\frac{1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}{2}$$

On reconnaît alors simplement à l'aide du signe de la partie réelle et imaginaire :

$$e^{\frac{6i\pi}{5}}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{\frac{-\sqrt{5}+5}{2}}}{2}\ ,\ e^{\frac{4i\pi}{5}}=-\frac{1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{\frac{-\sqrt{5}+5}{2}}}{2},$$
$$e^{\frac{2i\pi}{5}}=-\frac{1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}{2}\ ,\ e^{\frac{8i\pi}{5}}=-\frac{1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{2}}}{2}.$$