

Devoir surveillé

Exercice 1. *Intégrales de Wallis*

Pour tout entier naturel n , on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt.$$

1. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .
2. Prouver que l'on a pour tout n :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Indication : on pourra intégrer par parties, avec $\cos^{n+2} t = \cos^{n+1} t \cos t$.

3. A l'aide des deux questions précédentes, prouver que l'on a pour tout n :

$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}.$$

4. Prouver également que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \leq I_n$ et

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

5. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\pi(n+1)}{2(n+2)} \leq (n+1)I_{n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

et en déduire la limite de $\sqrt{n}I_n$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2. *Équations différentielles linéaires d'ordre 1*

1. Déterminer la solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$y' + \sin x \, y = 2 \sin x,$$

telle que $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

2. (a) Déterminer une solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de l'équation différentielle :

$$y' + y = 3e^{(2+i)x}$$

- (b) Décrire l'ensemble des solutions $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y + y = 3e^{2x} \cos x$$

Parmi les deux exercices suivants, vous en choisissez et n'en traitez qu'un seul sur votre copie (faute de quoi ils ne seront pas corrigés).

Exercice 3. *Sujet non bis : Rationnels et irrationnels*

1. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$.
2. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3. Somme de deux irrationnels.
 - (a) Montrer que $\sqrt{10}$ est irrationnel.
 - (b) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est irrationnel.
 - (c) La proposition suivante est-elle vraie : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2, x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Exercice 4. *Sujet bis : Equation différentielle originale*

On se propose dans cet exercice de déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$(F) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x.$$

1. Soient α et β deux réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \cos x + \beta \sin x = 0.$$

Prouver que $\alpha = \beta = 0$.

2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble \mathcal{S} des solutions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'' + 4y = 2x + 1.$$

- (a) Déterminer l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de l'équation homogène associée à (E) .
- (b) Déterminer une fonction affine qui est solution de (E) .
- (c) Décrire l'ensemble \mathcal{S} des solutions de (E) .
3. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction qui vérifie la propriété (F) .
 - (a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 .
 - (b) Prouver que f est une solution de (E) .
 - (c) En déduire une expression de f .
4. Conclure : décrire l'ensemble Ω des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la propriété (F) .