Devoir surveillé

Exercice 1. *Intégrales de Wallis*

Pour tout entier naturel n, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \text{ dt}.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
   $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \text{ dt} = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, on linéarise ensuite $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$ pour calculer :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2} \text{ dt}$$

$$I_2 = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_2 = \frac{\pi}{4}$$

2. Prouver que l'on a pour tout n :
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
   Indication : on pourra intégrer par parties, avec $\cos^n t = \cos t \cos^{n-1} t$.
   Suivant l'indication, on obtient :

$$I_{n+2} = [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(-\sin t)(n+1)\cos^n t \text{ dt}$$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \text{ dt}$$

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t \text{ dt}$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

3. A l'aide des deux questions précédentes, prouver que l'on a pour tout n :
$$(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}.$$
   D'après les valeurs de I_0 et I_1, on vérifie immédiatement que la propriété est vraie pour $n = 0$. Prouvons alors que si c'est vrai au rang n, c'est vrai au rang $n+1$. On suppose donc que $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$, or on sait d'après la question précédente que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$, i.e. $I_n = \frac{n+2}{n+1}I_{n+2}$. On obtient donc :

$$(n+1)I_{n+1}\frac{n+2}{n+1}I_{n+2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

   Ainsi, la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Prouver également que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} \leq I_n$ et

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $0 \leq \cos t \leq 1$. On en déduit, donc si $n \in \mathbb{N}$, que $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$. Par croissance et positivité de l'intégrale entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on en déduit $0 < I_{n+1} \leq I_n$. L'inégalité de droite est donc prouvée, on peut en effet diviser l'inégalité par I_n puisque $I_n > 0$ par positivité de l'intégrale.

On a alors aussi que $I_{n+2} \leq I_{n+1}$ pour les mêmes raisons. Grâce à la question 2), on en déduit : $\dfrac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1}$, et il ne reste plus qu'à diviser les deux membres de cette dernière inégalité pour obtenir que $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

5. Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(n+1)\pi}{(n+2)2} \leq (n+1)I_{n+1}^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

et en déduire la limite de $\sqrt{n}I_n$ quand $n \to +\infty$.

Pour obtenir l'inégalité, on multiplie simplement les trois membres de l'inégalité de la question précedente par $\frac{\pi}{2}$, ce qui revient au même d'après la question d'avant que de multiplier par $(n+1)I_{n+1}I_n$, et c'est donc par cela qu'on multiplie le membre du milieu.

Elle est vraie pour tout entier, donc si $n \in \mathbb{N}^*$, elle est aussi vraie au rang $n-1$ et porte sur des nombres positifs d'où :

$$\frac{n\pi}{(n+1)2} \leq nI_n^2 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\sqrt{\frac{n\pi}{(n+1)2}} \leq \sqrt{n}I_n \leq \sqrt{\frac{\pi(n+1)}{2n}}.$$

On en déduit aisément, par encadrement, que $\sqrt{n}I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 2. *Equations différentielles linéaires d'ordre* 1

1. Déterminer la solution $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$y' + \sin x \, y = 2 \sin x,$$

telle que $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

Pour résoudre l'équation homogène associée, on considère une primitive A de la fonction a telle que $a(x) = -\sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $A(x) = \cos x$ convient donc l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est :

$$\{y : x \mapsto Ce^{\cos x} | C \in \mathbb{R}\}.$$

Une solution particulière de l'équation complète est la fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p : x \mapsto 2$. On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\{y : x \mapsto Ce^{\cos x} + 2 | C \in \mathbb{R}\}.$$

La solution qui vérifie $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ est telle que $Ce^0 + 2 = 1$, c'est à dire $C = -1$ et $y(x) = 2 - e^{\cos x}$.

2. (a) Déterminer une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de l'équation différentielle :

$$y'(x) + y(x) = 3e^{(2+i)x}$$

Cherchons une solution sous la forme $y_p : x \mapsto Ke^{(2+i)x}$ où $K \in \mathbb{C}$ est une constante. Calculons alors, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$y_p'(x) + y_p(x) = (2+i)Ke^{(2+i)x} + Ke^{(2+i)x},$$

$$y_p'(x) + y_p(x) = (3+i)Ke^{(2+i)x}.$$

Ainsi, y_p est bien une solution si $(3+i)K = 3$, c'est à dire $K = \dfrac{3}{3+i} = \dfrac{9-3i}{10}$ et $y_p : x \mapsto \dfrac{9-3i}{10}e^{(2+i)x}$.

(b) Décrire l'ensemble des solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' + y = 3e^{2x} \cos x$$

Une solution particulière de cette nouvelle équation est Re (y_p) puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3e^{2x} \cos x =$ Re $(3e^{(2+i)x})$. Calculons pour $x \in \mathbb{R}$:

$$y_p(x) = \frac{9-3i}{10} e^{2x}(\cos x + i \sin x),$$

$$y_p(x) = \frac{9\cos x + 3\sin x}{10} e^{2x} + i\left(\frac{9\sin x - 3\cos x}{10} e^{2x}\right),$$

$$\text{Re } (y_p)(x) = \frac{9\cos x + 3\sin x}{10} e^{2x}.$$

L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions $\{y : x \mapsto Ce^{-x} | C \in \mathbb{R}\}$, donc l'ensemble des solutions de l'équation complète est :

$$\left\{ y : x \mapsto \frac{9\cos x + 3\sin x}{10} e^{2x} + Ce^{-x} | C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3. *Rationnels et irrationnels.*

1. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{Q}$ et $xy \in \mathbb{Q}$.
   Soient x et y dans $\mathbb{Q}$, on a alors a et c dans $\mathbb{Z}$, b et d dans $\mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$.
   On en déduit que $x + y = \frac{ad+bc}{bd}$ où $ad + bc \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{N}^*$ donc $a + b \in \mathbb{Q}$.
   De même, $xy = \frac{ac}{bd}$ où $ac \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{N}^*$ donc $ab \in \mathbb{Q}$.
2. Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, montrer que $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   Par l'absurde, supposons que $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et que $x + y \in \mathbb{Q}$.
   On aurait alors $y = -1x + (x + y)$ où $-1x \in \mathbb{Q}$ (car -1 et x sont rationnels) et $(x + y) \in \mathbb{Q}$. On en déduirait que $y \in \mathbb{Q}$, ce qui est la contradiction désirée.
3. Somme de deux irrationnels.
   (a) Montrer que $\sqrt{10}$ est irrationnel.
   Supposons par l'absurde que $\sqrt{10}$ est rationnel, on a alors deux entiers $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{10} = \dfrac{p}{q}$. On suppose en outre que p et q n'ont pas de diviseur commun, c'est à dire que la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible. En élevant au carré les deux membres de l'égalité, on obtient $p^2 = 10q^2$.
   Avant d'aller plus loin, rappelons le résultat suivant que nous avons démontré en cours par contraposée : si $p \in \mathbb{N}$ vérifie que p^2 est pair, alors p est pair. Par contraposition, il s'agissait de montrer que si p est impair, alors son carré est impair. Ceci se fait en écrivant qu'un entier p impair peut se mettre sous la forme $p = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$, et que son carré est alors de la forme $p^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ et est donc impair.
   Revenant à notre raisonnement par l'absurde, on observe que $p^2 = 2(3q^2)$ est pair, donc que p est pair et peut s'écrire $p = 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$. On obtient alors $4p'^2 = 10q^2$ donc $2p'^2 = 5q^2$, c'est à dire $2(p'^2 - 2q^2) = q^2$. On déduit de cette dernière égalité que q^2 est pair donc que q est pair. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que p et q sont sans diviseur commun, et termine la preuve de l'irrationnalité de $\sqrt{10}$.
   (b) Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est irrationnel.
   Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ est rationnel, c'est à dire qu'il existe a et b entiers tels que $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \dfrac{a}{b}$. En élevant cette égalité au carré, on obtient $2 + 5 + 2\sqrt{10} = \dfrac{a^2}{b^2}$ donc $\sqrt{10} = \dfrac{a^2 - 7b^2}{2b^2}$.
   Cette dernière écriture signifie que $\sqrt{10}$ est rationnel, fournissant la contradiction désirée.
   (c) La proposition suivante est-elle vraie : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2,\ x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
   Cette proposition est fausse : en effet, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mais leur somme est $0 \in \mathbb{Q}$.

Exercice 4. *Equation différentielle originale*

On se propose dans cet exercice de déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$(F)\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2f(-x) + x.$$

1. Soient α et β deux réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha \cos x + \beta \sin x = 0.$$

Prouver que $\alpha = \beta = 0$.
Pour $x = 0$, on obtient $\alpha = 0$ puis pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$.

2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation différentielle :

$$(E)\ \ y'' + 4y = 2x + 1.$$

   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène associée à (E). L'équation homogène associée, $y'' + 4y = 0$, a pour polynôme caractéristique $P(r) = r^2 + 4 = (r + 2i)(r - 2i)$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de cette équation homogène est :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ y : x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) | (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

   (b) Déterminer une fonction affine qui est solution de (E).
   On remarque que, pour $x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = \dfrac{2x + 1}{4}$ définit une solution affine de (E) puisque $y_p'' = 0$.

   (c) Décrire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{ y : x \mapsto A\cos(2x) + B\sin(2x) + \frac{2x + 1}{4} | (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une fonction qui vérifie la propriété (F).

   (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   Puisque f vérifie (F), on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2f(-x) + x$. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$, $x \mapsto 2f(-x) + x$ aussi donc f' est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est à dire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

   (b) Prouver que f est une solution de (E).
   Puisque f est deux fois dérivable, on déduit de la relation (F) par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -2f'(-x) + 1.$$

   Si f vérifie (F), on a aussi, si $x \in \mathbb{R}$, en prenant $-x$ au lieu de x comme réel : $f'(-x) = 2f(x) - x$.
   On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -2(2f(x) - x) + 1,$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 4f(x) = 2x + 1.$$

   Ceci signifie que f est une solution de (E).

   (c) En déduire une expression de f.
   On a donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + \dfrac{2x + 1}{4}$.

4. Conclure : décrire l'ensemble Ω des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifient la propriété (F). Il ne reste plus qu'à voir à quelle condition portant sur $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ une fonction f définie comme précédemment vérifie (F). Calculons donc pour une telle fonction :

$$f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{1}{2},$$
$$2f(-x) + x = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x) + \frac{-2x + 1}{2} + x,$$
$$2f(-x) + x = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)\frac{1}{2}.$$

Ainsi, f vérifie (F) si et seulement si l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \frac{1}{2} = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2(B - A)\sin(2x) + 2(B - A)\cos(2x) = 0$$

Grâce à la première question de cet exercice, f vérifie donc (F) si et seulement si f est de la forme précitée avec $A = B$. Ainsi, on décrit :

$$\Omega = \left\{ f : x \mapsto A\cos(2x) + A\sin(2x) + \frac{2x + 1}{4} \mid A \in \mathbb{R} \right\}.$$