# Corrigé du devoir à la maison

**Exercice 1.** *Exercices basiques*

1. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que $f$ s'écrive ainsi $f = p + i$ où $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire. Alors on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = p(x) + i(x)\ (1).$$
   Si $x \in \mathbb{R}$, la relation précédente doit être vérifiée pour $-x$ donc on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = p(-x) + i(-x),$$
   d'où par parité de $p$ et imparité de $i$ :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = p(x) - i(x)\ (2).$$
   En additionnant membre à membre les égalités (1) et (2), on obtient $f(x)+f(-x) = 2p(x)$, en les soustrayant $f(x)-f(-x) = 2i(x)$. Ainsi, si $f$ s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on a nécessairement :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$
   Réciproquement, si l'on définit ainsi les fonctions $p$ et $i$, on vérifie aisément que $f = p+i$, que $p$ est paire et que $i$ est impaire :
   — pour $f = p + i$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $p(x) + i(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$ ;
   — pour $p$ paire, soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $p(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = p(x)$ ;
   — pour $i$ impaire, soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $i(-x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = -i(-x)$.
2. Soit $E$ un ensemble, et $A, B$ deux sous-ensembles de $E$. On appelle *différence symétrique* de $A$ et $B$, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de $E$ :
   $$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}.$$
   Montrer que $A\Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$ ($C_E A$ désigne le complémentaire de $A$ dans $E$).
   Soit $x \in A\Delta B$. Par symétrie du problème, on peut toujours supposer que $x \in A$. Nécessairement, $x \notin B$. On en déduit que $x \in A$ et $x \in C_E B$. Ceci donne $x \in A \cap C_E B$. Réciproquement, si par exemple $x \in A \cap C_E B$, $x \in A$ et $x \notin B$, et donc $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. L'autre possibilité se traite exactement de la même façon.
3. Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie sur $I$ à valeurs réelles. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) $f$ est la fonction nulle : $\forall x \in I,\ f(x) = 0$.
   (b) $f$ s'annule : $\exists x \in I,\ f(x) = 0$.
   (c) $f$ est à valeurs positives : $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$.

(d) $f$ est constante : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I,\ f(x) = c$.
(e) $f$ est strictement croissante sur $I$ : $\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

**Exercice 2.** *Récurrences*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n$.

   Démontrer par récurrence que $u_n \leq \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \geq 3$.

   On commence par calculer $u_2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{1}\right) u_1 = \frac{1}{2}$, et $u_3 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) u_2 = \frac{3}{8}$. Ainsi, on a bien $u_3 \leq \dfrac{2}{3}$.

   Vérifions que la propriété est héréditaire. Soit donc $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, tel que $u_n \leq \dfrac{2}{n}$, on a alors :
   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{2}{n} = \frac{n+1}{n^2}.$$
   Vérifions alors que l'on a l'inégalité :
   $$(I)\ \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{2}{n+1}$$
   $$(I) \Leftrightarrow\ \frac{(n+1)^2 - 2n^2}{n^2(n+1)} \leq 0$$
   $$(I) \Leftrightarrow\ -n^2 + 2n + 1 \leq 0$$
   Le trinôme du second degré ci-dessus admet pour racines $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$ donc l'inéquation est vérifiée pour tout $n \notin ]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[$ et donc en particulier si $n \geq 3$. Cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit : $u_{n+1} \leq \dfrac{2}{n+1}$, la propriété à démontrer est donc héréditaire et vraie pour tout entier $n \geq 3$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(1 + \sqrt{2})^n$ est de la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où $a_n$ et $b_n$ sont des nombres entiers naturels.
   Pour $n = 0$, on a $(1 + \sqrt{2})^0 = 1 + 0\sqrt{2}$ qui est de la forme voulue avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, où $a_n$ et $b_n$ sont des nombres entiers naturels. On en déduit :
   $$(1 + \sqrt{2})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$$
   $$(1 + \sqrt{2})^{n+1} = a_n + 2b_n + (a_n + b_n)\sqrt{2}$$
   Donc $(1 + \sqrt{2})^{n+1}$ est de la forme attendue avec $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$.
   La propriété est héréditaire donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 3.** *Injections, surjections, bijections*

1. On note $id_E : E \to E$ l'application telle que $\forall x \in E,\ id_E(x) = x$. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que $f$ est bijective.
   Montrons d'abord l'injectivité en prouvant, pour $(x_1, x_2) \in E^2$, que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. On suppose donc que $f(x_1) = f(x_2)$ donc $f(f(f(x_1))) = f(f(f(x_2)))$.
   Ainsi, puisque $f \circ f \circ f = id_E$, $x_1 = x_2$.

Montrons maintenant la surjectivité de $f : E \to E$. Soit donc $y \in E$, on doit prouver qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Or $f(f(f(y))) = y$ donc $x = f(f(y))$ est un antécédent de $y$ par $f$.

Puisque $f$ est injective et surjective, c'est une bijection.

2. Injectivité :

   Prouvons que $\phi$ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

   Si $A \cup B \neq E$, on a $x \in E$ qui n'appartient ni à $A$ ni à $B$ donc :

   $$\phi(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset);$$

   $$\phi(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = (\emptyset, \emptyset);$$

   et l'on voit donc que $\phi$ n'est pas injective. Par contraposée, on a déjà prouvé que si $\phi$ est injective, alors $A \cup B = E$.

   Prouvons maintenant la réciproque, soient donc $A$ et $B$ deux parties de $E$ telles que $A \cup B = E$. Dans ce cas, si $X \in \mathcal{P}(E)$, prouvons que l'on a :

   $$X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$$

   Si $x \in X$, puisque $A \cup B = E$ on est toujours dans au moins l'un de ces deux cas :
   — si $x \in A$ alors $x \in (X \cap A)$ donc $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$ ;
   — si $x \in B$ alors $x \in (X \cap B)$ donc $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$.
   La première inclusion est prouvée, si maintenant $x \in (X \cap A) \cup (X \cap B)$, dans les deux cas possibles on a bien $x \in X$ donc la deuxième inclusion est triviale.

   Si $A \cup B = E$, pour prouver l'injectivité, supposons maintenant que deux parties $X_1$ et $X_2$ vérifient $\phi(X_1) = \phi(X_2) = (C, D)$. Alors on vient de voir que $X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_2 \cap B) = C \cup D$ et de même $X_2 = C \cup D$ donc $X_1 = X_2$.

3. Surjectivité :

   Prouvons que $\phi$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

   Si $A \cap B \neq \emptyset$, soit $x \in A \cap B$. Alors $(\{x\}, \emptyset)$ n'a pas d'antécédent $X$ par $\phi$ car il est impossible que $X \cap A = \{x\}$ et $X \cap B = \emptyset$ puisque $x \in B$. Donc $\phi$ n'est pas surjective et l'on a prouvé par contraposée que si $\phi$ est surjective, alors $A \cap B = \emptyset$.

   Supposons maintenant que $A \cap B = \emptyset$, prouvons que $\phi$ est surjective. Soit donc $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, notons alors $X = A' \cup B'$. Il est clair que $X \cap A = A'$ et $X \cap B = B'$ puisque $A'$ et $B'$ sont inclus respectivement dans $A$ et $B$ eux même disjoints. Donc $\phi(X) = (A', B')$ et la surjectivité est prouvée.