Devoir à la maison

Exercice 1. *Exercices basiques*

1. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E :

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}.$$

   Montrer que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ ($\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E).
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) f est la fonction nulle.
   (b) f s'annule.
   (c) f est à valeurs positives.
   (d) f est constante.
   (e) f est strictement croissante sur I.

Exercice 2. *Récurrences*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n$.

   Démontrer par récurrence que $u_n \leq \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \geq 3$.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $(1 + \sqrt{2})^n$ est de la forme $a_n + b_n\sqrt{2}$, où a_n et b_n sont des nombres entiers naturels.

Exercice 3. *Injections, surjections, bijections*

1. On note $Id_E : E \to E$ l'application telle que $\forall x \in E,\ Id_E(x) = x$. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = Id_E$. Montrer que f est bijective.
2. A quelle condition sur les sous-ensembles A et B d'un ensemble E donné l'application : $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie pour toute partie X de E par $\phi(X) = (A \cap X, B \cap X)$ est-elle injective ? surjective ?