Programme des colles du 15/12 au 19/12

1. Logique et raisonnement
   - Définition d'une proposition logique : énoncé qui est soit vrai, soit faux.
   - Connecteurs logiques : et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.
   - Quantificateurs et prédicats.
   - Négation d'assertions avec des quantificateurs, "et", "ou", $\Rightarrow$.
   - Raisonnement par contraposée : pour $n \in \mathbb{Z}$, on a n^2 pair $\Rightarrow n$ pair puis par l'absurde : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
   - Récurrences.
   - **Raisonnement par analyse-synthèse : toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écit d'une seule manière comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.**
   - Ensembles, inclusion et égalité d'ensembles.
   - Union, intersection, différence et complémentaire
   - Fonctions injectives, surjectives, bijectives.
   - **Une composée d'injections est injective, une composée de surjections est surjective.**
   - Composée de bijections et réciproque d'une composée.
2. Sommes et produits avec notations Σ et Π
   - Symbole $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ où m et n sont deux entiers relatifs tels que $m \leq n$, convention que la somme est nulle sinon, nombre de termes d'une telle somme : $n - m + 1$.
   - Linéarité de la somme.
   - Sommes télescopiques.
   - Sommes géométriques pour $q \neq 1$:
   $$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
   - Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
   $$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
   - **Sommes doubles $\sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$, $\sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ ou $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$ à savoir écrire comme deux sommes imbriquées et calculer sur des exemples.**
   - Changement d'indice dans une somme : $j = \alpha + k$ ou $j = \alpha - k$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$).
   - Coefficients binomiaux, formules :
   $$(i)\ (n+1)! = (n+1)n!$$
   $$(ii)\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
   $$(iii)\ \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
   $$(iv)\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
   NB : ces formules sont valables pour toutes valeurs entière relative de k et entière naturelle de n avec la convention que $\binom{n}{k} = 0$ lorsque l'inégalité $0 \leq k \leq n$ n'est pas respectée.
   - Formule du binôme de Newton.