
Programme des colles du 05/01 au 09/01

1. Logique et raisonnement

- Connecteurs logiques : et, ou, \Rightarrow , \Leftrightarrow .
- Quantificateurs et prédicats.
- Négation d'assertions avec des quantificateurs, "et", "ou", \Rightarrow .
- Raisonnement par contraposée : pour $n \in \mathbb{Z}$, on a n^2 pair $\Rightarrow n$ pair puis par l'absurde : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
- Récurrences.
- Raisonnement par analyse-synthèse.
- Ensembles, inclusion et égalité d'ensembles.
- Union, intersection, différence et complémentaire
- Fonctions injectives, surjectives, bijectives.
- Composée de bijections et réciproque d'une composée.

2. Sommes et produits avec notations Σ et Π

- Symbole $\sum_{k=m}^n a_k$ où m et n sont deux entiers relatifs tels que $m \leq n$, convention que la somme est nulle sinon, nombre de termes d'une telle somme : $n - m + 1$.
- Linéarité de la somme.
- Sommes télescopiques.
- Sommes géométriques pour $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} ; \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **Sommes doubles** $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}$, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ ou $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$ à savoir écrire comme deux sommes imbriquées et calculer sur des exemples.
- Changement d'indice dans une somme : $j = \alpha + k$ ou $j = \alpha - k$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$).
- Coefficients binomiaux, formules :

$$(i) (n+1)! = (n+1)n!$$

$$(ii) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$(iii) \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$(iv) k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

NB : ces formules sont valables pour toutes valeurs entières relative de k et entière naturelle de n avec la convention que $\binom{n}{k} = 0$ lorsque l'inégalité $0 \leq k \leq n$ n'est pas respectée.

- Formule du binôme de Newton.

3. Suites

- Calcul du terme général : suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre 2.
- **Limites finies de suites : connaître les deux définitions possibles et la preuve de l'unicité.**
- Toute suite convergente est bornée.
- Limites $+\infty$ et $-\infty$.
- **Limite d'une combinaison linéaire de deux suites convergentes.**
- Limite du produit de suites convergentes.
- Opérations et limites avec des suites convergentes ou divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.
- Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.
- Théorème de convergence par encadrement.
- Théorème de la limite monotone.