Suites

1 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$, parties majorées et minorées

Exercice 1. *Revoir ses définitions*
Soit $A \subset \mathbb{R}$. Écrire avec les quantificateurs les propositions suivantes :

1. a n'est pas un majorant de A.
2. A n'est pas minoré.
3. A n'admet pas un plus petit élément.
4. A est borné.
5. a est la borne supérieure de A.

Exercice 2. *Parties minorées, majorées et inclusion.*
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A est majoré (resp. minoré) et B est inclus dans A. Montrer que B est majoré (resp. minoré) et que $\sup B \leqslant \sup A$ (resp. $\inf A \leqslant \inf B$).
2. On suppose que A et B sont bornés et $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cap B$ est borné et que $\max\{\inf A, \inf B\} \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup A, \sup B\}$.
3. On suppose que : $\forall (a, b) \in A \times B : \ a \leqslant b$. Montrer que $\sup A \leqslant \inf B$.

Exercice 3. *Infimum, Supremum d'ensembles à partir de deux parties.*
Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf A$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
3. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ et $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.
4. Montrer que, si de plus A et B sont inclus dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sup(AB) = \sup A \sup B$. Cette égalité est-elle vraie en général ?

Exercice 4. *Inf et Sup de divers ensembles.*
Déterminer, si elles existent, les bornes supérieures et inférieures et les petits et grands éléments des parties suivantes de $\mathbb{R}$:

1. $A = \{1 - \frac{1}{n^2} | \, n \in \mathbb{N}^*\}$,
2. $B = \{1 + \frac{(-1)^n}{n} | \, n \in \mathbb{N}^*\}$,
3. $C = \{\sin(\frac{2n\pi}{7}) | \, n \in \mathbb{Z}\}$,
4. $D = \{-x^2 + 2x | \, x < 2\}$,
5. $E = \{a + bn | \, n \in \mathbb{N}\}$, $(a, b \in \mathbb{R}^+)$,
6. $F = \{a + \frac{b}{n} | \, n \in \mathbb{N}^*\}$, $(a, b \in \mathbb{R}^+)$.

2 Calcul du terme général : premiers exemples

Exercice 5. *Suites arithmétiques et géométriques*

Déterminer le terme général u_n en fonction de n de ces suites réelles :

1. La suite (u_n) arithmétique telle que $u_{10} = 100$ et $u_{20} = -150$.
2. La suite géométrique de raison 2 telle que $u_1 = 10$
3. La suite (u_n) qui vérifie $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 2u_n - 4$
4. La suite géométrique qui vérifie $u_3 = 11$ et $u_6 = 297$
5. La suite (u_n) qui vérifie $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = -u_n + 5$.

Calculer ensuite la somme des termes de chacune des suites définies ci-dessus pour n variant entre 5 et 20.

Exercice 6. *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2*

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes :

1. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 3$, $u_1 = 19$.
2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.
3. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$ et $u_2 = 2$.

Exercice 7. *Une suite issue de la géométrie*

On considère un carré de côté 1. On le partage en 9 carrés égaux, et on colorie le carré central. Puis, pour chaque carré non-colorié, on réitère le procédé. On note u_n l'aire coloriée après l'étape n. Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice 8. *Une somme télescopique*

Calculer en fonction de n le terme généra de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

Indication : On pourra calculer $v_n = u_{n+1} - u_n$ et constater que $v_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$

Exercice 9. *Encore une somme télescopique*

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Montrer qu'il existe a, b et c dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Exprimer simplement v_n en fonction de n.

Exercice 10. *Une somme à rendre télescopique*

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général, pour $n \geq 1$: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k}$.

1. En calculant $2u_n - u_n$, exprimer u_n en fonction de n.
2. En déduire l'expression du terme général de la suite v définie pour tout n entier par : $v_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{2^k}}$.

3 Convergence, divergence, limites par encadrement

Exercice 11. *Calcul et encadrement*
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par :

$$u_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}\, u_n.$$

Exprimer u_n en fonction de n. Quelle est la limite de u_n ?

Exercice 12. *Avec des cosinus et sinus*

1. Montrer que la suite (x_n) définie par $x_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$ est divergente.
2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.
   (b) En déduire que la suite $\left(\sin\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right)\right)$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 13. *Majoration de la valeur absolue*
Déterminer la nature de la suite de terme général :

$$u_n = \left(2\sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4}\cos n\right)^n.$$

Exercice 14. *Comparaison avec une suite géométrique*
Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs vérifiant $|u_n|^{\frac{1}{n}} \to \ell \in [0,1[$ lorsque $n \to +\infty$. Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 15. *Limites de sommes*

1. Calculer la limite de la suite de terme général, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p}.$$

2. Calculer la limite de la suite de terme général, pour $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

3. On note :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

   Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, puis que $\dfrac{S_n}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

4. Soit

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{i}}.$$

   Déterminer la limite de B_n lorsque n tend vers l'infini.

4 Suites monotones

Exercice 16. *Suite croissante et majorée*

Soit $k \in]0,1[$; on considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+k^i)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R},\ 1+x \leq e^x$.
2. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 17. *Suites adjacentes*

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = (1+\frac{1}{n})u_n$ sont adjacentes.
2. Même question avec $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ et $y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Exercice 18. *Généralisation de la divergence de la série harmonique*

(u_n) est une suite décroissante de réels positifs ; on suppose que la suite $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ est convergente. Montrer que $nu_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Indication : $S_{2n} - S_n \to 0$ quand $n \to \infty$ puisque chacune des deux suites (S_n) et (S_{2n}) tend vers 0, et l'on pourra prouver que $0 \leq nu_{2n} \leq S_{2n} - S_n$.

Exercice 19. *Radicaux itérés*

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}}$.

1. Écrire une formule de récurrence liant u_{n-1} et u_n.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.

   (Indication : Prouver par récurrence sur n que $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$)
3. Déterminer sa limite.

   (Indication : Repartir des inégalités précédemment trouvées)

5 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 20. *Un petit problème*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$, et (u_n) la suite définie par :
$u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que, pour tout n, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$, $n \geq 0$, est croissante.
4. Montrer que la suite (v_n) admet une limite l appartenant à $]0,1]$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).
5. On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que (w_n) converge vers $l(1-l)$.
6. Soit (t_n) une autre suite telle, pour $n \geq n_0$, on a
$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{a}{n},$$
où $a > 0$. Montrer que $t_{2n} - t_n \geq \frac{a}{2}$ pour $n \geq n_0$, puis que (t_n) est divergente.
7. Montrer que si $l \neq 1$, la suite (v_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (t_n) de la question précédente. En déduire la valeur de l.