Sommes et produits

Exercice 1. *Sommes télescopiques : exemples d'applications*

1. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$.
2. Calculer également $T_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+2)}$.
3. Somme des puissances d'un complexe :

   On note, pour $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

   Calculer $(q-1)P_n$, puis retrouver ainsi l'expression de P_n en fonction de q et de n.
4. Calculer $S = \sum_{i=1}^{n} i2^i$: pour cette somme, on pourra commencer par calculer en fonction de $i \in \mathbb{N}^*$ l'expression de $u_i - u_{i-1}$, où $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_i = (i-1)2^{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.
5. Calculer la somme suivante en fonction de n : $S_n = \sum_{p=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$.
6. (a) Pour $p \in \mathbb{N}$, vérifier que $\arctan(p+1) - \arctan p = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

   (b) Déterminer la limite de $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$.

Exercice 2. *Calculs techniques de sommes*

Calculer chacune des sommes suivantes :

$$\sum_{k=2}^{n+1} 7 \qquad \sum_{k=5}^{n} (2k+1)$$

$$\sum_{i=5}^{n+5} i \qquad \sum_{i=2}^{n} (n+3-i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \qquad \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i(2i+3)$$

Exercice 3. *Somme des entiers, des carrés et des cubes*

Il existe des formules simples et bien connues pour calculer directement la somme des entiers de 1 à n en fonction de n ainsi que la somme de leurs carrés. On se propose ici de trouver alors une formule pour la somme des cubes.

1. Vérifier par récurrence que les deux formules suivantes sont justes :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. On note $S_3 = \sum\limits_{k=0}^{n} k^3$. A l'aide du changement de variable $i = n - k$, et grâce à la question précédente, trouver une formule pour calculer directement S_3 en fonction de n.

Exercice 4. *Autre méthode pour le calcul de sommes de puissances d'entiers consécutifs*

En utilisant l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} ((k-1)+1)^2$$

et en développant le second membre, retrouver $\sum\limits_{k=0}^{n} k$.

Appliquer la même méthode pour calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 5. *Sommes de coefficients binomiaux*

1. Calculer les sommes suivantes (on pourra appliquer la formule du binôme de Newton, ou bien les propriétés des coefficients binomiaux).

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \quad ; \quad S_2 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \quad ; \quad S_3 = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} \quad ; \quad S_4 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i i \binom{n}{i}$$

2. On considère la fonction $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$.
   (a) A l'aide de la formule du binôme de Newton, simplifier l'écriture de la fonction f.
   (b) En déduire une expression simple de $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i x^{i-1}$ puis de $h(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i x^i$.

Exercice 6. *Exercice à astuce*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ des nombres réels tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$$

Montrer que pour tout i de $\{1, ..., n\}$, on a $x_i = 1$.

Astuce : on pourra calculer la somme suivante, l'idée étant que la variance de la série $(x_1, ..., x_n)$ (dont la moyenne vaut 1) est nulle.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)^2$$

Exercice 7. *Les coefficients binomiaux sont des entiers*

Rappeler la formule de Pascal, puis montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que l'on a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \ \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Exercice 8. *Calcul d'un produit*

Montrer que la formule suivante est juste pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$$

Indication : on pourra noter $u_n = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$, et $v_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1)$, puis chercher ensuite comment calculer u_{n+1} en fonction de u_n et de n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Enfin, on vérifiera que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la même relation de récurrence.

Exercice 9. *Sommes doubles*

Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{0\leq i,j\leq n} (i+j)$$
$$S_2 = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} (i+j)$$
$$S_3 = \sum_{0\leq i<j\leq n} (i+j)$$
$$S_4 = \sum_{0\leq i,j\leq n} ij$$
$$S_5 = \sum_{0\leq i\leq j\leq n} ij$$
$$S_6 = \sum_{0\leq i<j\leq n} ij$$

Exercice 10. *Produit de sommes*

1. Si les nombres $a_1, a_2, \cdots, a_m$ et $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sont des complexes, montrer que l'on a :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} a_i b_j = \left(\sum_{1\leq i\leq m} a_i\right)\left(\sum_{1\leq j\leq n} b_j\right).$$

2. Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\binom{n}{k}$$
$$T_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} i\binom{n}{j}\sqrt{2}^j$$

Exercice 11. *Carré d'une somme*

On souhaite prouver que pour tous $a_1, a_2 \cdots, a_n$ réels positifs ou nuls, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n} a_i} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2 a_i}.$$

On pourra commencer par calculer S^2, où $S = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=k}^{n} a_i}$ puis minorer cette quantité.

Exercice 12.

En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 13.

Démontrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$ (pour $0 \leq k \leq p \leq n$). En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}.$$

Exercice 14.

Démontrer que $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$ pour $1 \leq p \leq n-1$.

Exercice 15.

Montrer que, pour p et n entiers naturels non nuls tels que $1 \leq p \leq n$, on a :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Exercice 16.

1. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p},$$
où p et n sont des entiers naturels avec $0 \leq p \leq n$.
2. Avec les mêmes notations, montrer que
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0.$$

Exercice 17.

En utilisant la formule du binôme montrer :

$$(a)\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\binom{n}{k} = 0 \qquad (b)\ \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}.$$

Exercice 18.

Calculer le module et l'argument de $(1+i)^n$. En déduire les valeurs de

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots \\ S_2 &= \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \cdots \end{aligned}$$