Logique, Raisonnement.

Exercice 1. *Utilisation des quantificateurs, implications, équivalences*

Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est la fonction nulle (où f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
2. f est l'identité de $\mathbb{R}$ (c'est à dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).
3. Le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$.
4. f est croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
5. L'équation $\sin x = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *Négation de propositions*

Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. f n'est pas nulle (où f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
2. f n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$.
3. Le graphe de f ne coupe pas la droite d'équation $y = x$.
4. f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

Exercice 3. *Preuve de négations*

1. Montrer que la fonction sin n'est pas nulle.
2. Montrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. *Encore des quantificateurs*

Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1. (a) Tout entier naturel est pair ou impair.
   (b) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.
2. (a) f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
   (b) f n'est pas strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
3. (a) f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
   (b) f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) f est une homothétie (où $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$).
   (b) f n'est pas un homothétie.
5. (a) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand (cette affirmation est vraie).
   (b) Il y a un entier plus grand que tous les entiers (cette affirmation est fausse).

Exercice 5. *Somme des angles d'un polygone*

Dans cet exercice, on se propose de démontrer directement le fait suivant : si $n \geq 3$ est un polygone non croisé à n cotés, alors la somme des angles de ce polygone est égale à $(n-2)\pi$.

1. On considère une personne qui ferait le tour du polygone dans le sens trigonométrique, et l'on note α_1, α_2,..., α_n les angles selon lesquels il tourne en arrivant à chaque sommet. On note par ailleurs β_1, β_2,..., β_n les angles intérieurs du polygone. Exprimer, pour k un entier entre 1 et n, le lien entre α_k et β_k.
2. Que vaut $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$? En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \beta_k$.

Exercice 6. *Diverses équations fonctionnelles*

1. Décrire l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient :
$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m+n) = f(m)f(n)$$
2. Décrire l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que l'on a pour tous x et y réels :
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
Cet ensemble de fonctions est-il le même si l'on suppose simplement que f est dérivable en 0 ?
3. Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que l'on a pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x+y) - f(x-y) = 4xy.$$

Exercice 7. *Divisibilité par 8*

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.
3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 8. *Nombres premiers*

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers en raisonnant par l'absurde. Supposer donc qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers p_1, p_2,..., p_n et fabriquer un nombre qui n'est divisible par aucun d'entre eux. On pourra admettre que tout nombre admet un diviseur premier pour conclure, la preuve de ce dernier résultat est proposée parmi les récurrences qui suivent dans cette feuille d'exercices.

Exercice 9. *Bien interpréter l'énoncé*

Soient a, b deux nombres réels et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 + ax + b$. On suppose qu'il existe un réel t tel que $f(t) = f(f(f(t))) = 0$.
Montrer que $f(0) \times f(1) = 0$.

Exercice 10. *Disjonction de cas*

Soient x, y et z trois réels appartenant à l'intervalle $[0,1]$ et vérifiant :

$$(1-x)(1-y)(1-z) = xyz.$$

Montrer qu'au moins un des trois réels $(1-x)y$, $(1-y)z$ ou $(1-z)x$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice 11. *La maladie des moines*

On considère une communauté de 60 moines dont 10 sont atteints par une maladie incurable et contagieuse qui se manifeste notamment par l'apparition d'un point noir sur leur front. Aucun d'entre eux ne sait combien sont atteints par la maladie, ni si lui-même est malade car ils ne disposent d'aucun miroir ou autre moyen de se voir. Les moines ont fait voeu de silence, ils ne communiquent pas entre eux mais se voient les uns les autres pendant la journée. L'unique information dont ils disposent est le nombre de malades parmi les autres. S'ils peuvent savoir avec certitude qu'ils sont atteints, ils se donneront la mort pendant la nuit pour que la maladie ne se répande pas davantage. Décrire la stratégie que vont adopter les moines.

Exercice 12. *Récurrence à initialiser correctement*

Quel est le plus petit entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, que $n^2 < 2^n$?

Exercice 13. *Une inégalité classique*

Montrer que l'on a pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 + na \leq (1+a)^n$$

Exercice 14. *Diverses récurrences pour différentes décompositions des nombres entiers*

1. Démontrer que tout nombre $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ peut s'écrire sous la forme $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ où les entiers p_1, p_2,$\cdots$, p_r sont des nombres premiers (pas forcément distincts).
2. Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire sous la forme : $n = \sum_{i=1}^{r} 2^{k_i}$ où $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ sont des entiers distincts.

Exercice 15. *Olympiades de 1977 avec indications*

Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1) > f(f(n))$. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.
Indications :

- Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\forall k \geq n, f(k) \geq n$.
- Vérifier que f est croissante (il s'agit en fait d'une suite).
- Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) < n+1$ et conclure.

Exercice 16. *Ensemble des parties*

Écrire l'ensemble des parties de $E = \{a, b, c, d\}$.

Exercice 17. *Trois ensembles*

Soient A, B, C trois ensembles tels que $A \cup B = B \cap C$. Montrer que $A \subset B \subset C$.

Exercice 18. *Lois de Morgan*

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Pour $X \subset E$, on note $\overline{X}$ le complémentaire de X dans E. Démontrer les lois de Morgan suivantes :

1. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
2. $\overline{(\overline{A})} = A$
3. $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Exercice 19. *Produit cartésien*

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Démontrer que D ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.
Indication : raisonner par l'absurde et considérer $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Exercice 20. *Différence symétrique*

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\Delta B$, le sous-ensemble de E :

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}.$$

1. Interpréter les éléments de $A\Delta B$.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$ ($C_E A$ désigne le complémentaire de A dans E).
3. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\varnothing$, $A\Delta E$, $A\Delta C_E A$.
4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E, on a :

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C).$$

$$(A\Delta B) \cup C = (A \cup C)\Delta(B \cup C).$$

Exercice 21. *Réunion et intersection égales*

Soit E un ensemble et A, B, C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.
2. Démontrer que, si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$. Une seule des deux conditions suffit-elle ?

Exercice 22. *Retour sur la différence symétrique*

Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E. On rappelle que la *différence symétrique* de A et B est définie par

$$A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup \left(\bar{A} \cap B\right)$$

où $\bar{A}$ (resp. $\bar{B}$) désigne le complémentaire de A (resp. de B) dans E. Démontrer que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \varnothing$.

Exercice 23. *Exemples d'image directe et d'image réciproque*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, et soit $A = [-1, 4]$. Déterminer
   (a) l'image directe de A par f ;
   (b) l'image réciproque de A par f.
2. On considère la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle est l'image directe, par sin, de $\mathbb{R}$? De $[0, 2\pi]$? de $[0, \pi/2]$? Quelle est l'image réciproque, par sin, de $[0, 1]$? de $[3, 4]$? de $[1, 2]$?

Exercice 24. *Un exemple avec des fonctions*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 25. *Avec des nombres complexes*

Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$$

est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 26. *Implications*

On considère 4 ensembles A, B, C et D, et des applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$. Montrer que

$$g \circ f \text{ injective} \implies f \text{ injective},$$

$$g \circ f \text{ surjective} \implies g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\big(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\big) \iff \big(f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice 27. *Devinettes*

1. Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une bijection de $\{1/n;\ n \geq 1\}$ dans $\{1/n;\ n \geq 2\}$.
3. Déduire de la question précédente une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1[$.
4. Déterminer une bijection de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

Exercice 28. *Image directe de l'image réciproque...et vice-versa !*

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Démontrer que

1. $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$;
2. $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Question subsidiaire (plus difficile) : a-t-on égalité en général ?

Exercice 29. *Ensembles et images réciproques*

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également A et B deux parties de F.

1. Démontrer que $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Démontrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. Démontrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 30. *Ensembles et images directes*

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$. Soient également A et B deux parties de E.

1. Démontrer que $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Démontrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion réciproque est-elle vraie ?
3. Démontrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Exercice 31. *Image directe et injectivité*

Soit $f : X \to Y$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. Pour tous A, B de X, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 32. *Fonctions et fonctions d'ensemble*

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$. On définit deux applications $f^\sharp$ et $f_\sharp$ par :

$$\begin{aligned} f^\sharp &: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F), & f^\sharp(A) &= f(A) \\ f_\sharp &: \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E), & f_\sharp(A) &= f^{-1}(A). \end{aligned}$$

Démontrer que

1. $f^\sharp$ est injective si et seulement si f est injective.
2. $f_\sharp$ est surjective si et seulement si f est injective.

Exercice 33. *Quelques exemples*

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,\ \ f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\ \ f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$

$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2.$$

Exercice 34. *Encore des exemples*

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n + 1$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.